АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

III

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

РЕФЕРАТЫ

6В1—6В318

*

U. I. C. C
AUG 20 1974
LIBRARY

№ 6 1961
ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ
МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР доктор физ.-матем. наук *Р. В. Гамкрелидзе*

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ: академик *П. С. Александров*, академик *А. Н. Колмогоров*, профессор *Л. Д. Кудрявцев*, профессор *В. И. Левин*, член-корреспондент АН СССР *Ю. В. Линник*, профессор *А. И. Маркушевич*, профессор *М. А. Наймарк*, профессор *В. В. Немыцкий*, профессор *С. М. Никольский*, академик *П. С. Новиков*, профессор *Д. Ю. Панов*, профессор *К. А. Рыбников*, член-корреспондент АН СССР *Н. В. Смирнов*, профессор *С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ канд. физ.-матем. наук *Н. М. Остиану*

СОДЕРЖАНИЕ

Теория вероятностей и математическая статистика
Теория вероятностей 6В1
Математическая статистика 6В28
Теория игр, исследование операций и математическая экономика 6В59
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов . . 6В134
Численные и графические методы 6В170
Таблицы . . . . . —
Вычислительные машины и математические приборы 6В260
Применение вычислительных машин . . . . . —
Авторский указатель

Адрес редакции: Москва, Д-219, Балтийская улица, 14.

Технический редактор *Л. Н. Беляновская*

Подписано в печать 9/VI-1961 г. Формат бумаги 84×108¹/₁₆ Тираж 1010
Печ. л. 3,5 Усл. печ. л. 5,74 Уч.-изд. л. 9,78 Заказ 1691

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ, Люберцы, Октябрьский проспект, 403

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

III. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

Рефераты 6 В1—6 В318 **№ 6** **Июнь 1961 г.**

ГНЦ ВНИИ СО АН СССР
Техбиблиотека
п/я 1998
594 ж
1967

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редактор *О. В. Сарманов*

6 В1. Случайный вектор со сферической симметрией. Блох Э. Л. «Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика», 1960, № 1, 102—110

Рассматривается случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ со сферической симметрией, т. е. такой, что плотность распределения вероятности вектора ξ, обозначаемая $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, зависит только от $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. С помощью изящных и простых рассуждений выводится ряд свойств функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = f(r)$. В частности, доказаны следующие факты: 1. Одномерные плотности распределения величин $\xi_k - \varphi_k(x)$ должны быть одинаковы. 2. Функция $f(r)$ определяется однозначно по функции $\varphi_k(x)$ и наоборот. 3. Если ξ_k независимы, то они должны иметь нормальное распределение. Находятся среднее значение и дисперсия случайной величины $\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$, которые выражаются через $M\xi_k^2$ и $M|\xi_k|$. Показано, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D\rho}{n} = M\xi^2 - \frac{\pi}{2}(M|\xi_k|)^2.$$

Далее рассматривается случайный угол θ между вектором ξ и произвольным неслучайным вектором $\mathbf{a}$. Выписывается плотность распределения θ и показывается, что

$$M\theta = \frac{\pi}{2}, \quad D\theta \leqslant \frac{4}{n-1}.$$

Отсюда следует, что при $n \to \infty$, $\theta \to \pi/2$ по вероятности. Приведено несколько примеров. Как замечает автор, сферически симметричные векторы встречаются в теории связи. В. Ф. Писаренко

6 В2. Заметка о характеризации унимодальных распределений. Isii Keiiti. Note on a characterization of unimodal distributions. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1958, 9, № 3, 173—184 (англ.)

Функция распределения $\psi(t)$ унимодальна с модой β, если и только если для любых x_1, x_2, x_3, x_4 таких, что $x_1 < x_2 < \beta < x_3 < x_4$ и для любого $h > 0$ имеем:

$$\psi(x_1) - \psi(x_1 - h) \leqslant \psi(x_2) - \psi(x_2 - h),$$
$$\psi(x_3 + h) - \psi(x_3) \geqslant \psi(x_4 + h) - \psi(x_4).$$

Преобразование функции распределения $\psi(t)$: $I(z; \psi) = \int_S d\psi(t)/(z-t)$ называется модифицированным преобразованием Стилтьеса, где z — комплексное переменное Статья посвящена доказательству следующих основных теорем:

Теорема I. Пусть $\psi(t)$ — функция распределения на $(-\infty, \infty)$. Тогда $\psi(t)$ унимодальна с модой β, если и только если $I(z; \psi)$ — монотонно неубывающая функция на лучах $\arg(z-\beta) = \theta\,(\text{const})$, $0 \leqslant \theta < \pi$, где z начинается в точке β.

Теорема II. Пусть $\psi(t)$ унимодальна на $(-\infty, \infty)$ с модой β. Тогда существует соответствующая единственная функция распределения $\varphi(t)$ с $I(z, \varphi) = -(z-\beta) \times I(z, \psi)$. Обратно, для любой функции распределения $\varphi(t)$, имеющей модифицированное преобразование Стилтьеса $I(z, \varphi)$, существует единственная унимодальная функция распределения $\psi(t)$ с модой β такая, что

$$I(z, \varphi) = -(z-\beta) I(z, \psi).$$

Указанные теоремы устанавливают взаимнооднозначное соответствие между классом всех функций распределения и классом унимодальных функций распределения с модой β. Теоремы верны и для функций распределений на произвольном интервале s. Они позволяют установить связь проблемы моментов для унимодальных распределений и произвольных распределений. П. А. Строганов

6 В3. О некоторых некоррелированных высшего порядка функциях от нормально распределенных переменных. Laha R. G., Lukacs E. On certain functions of normal variates which are uncorrelated of a higher order. «Biometrika», 1960, 47, № 1-2, 175—176 (англ.)

Две случайные величины называются некоррелированными порядка (r, s), если их математические ожидания удовлетворяют соотношению $E(x^i y^j) = Ex^i Ey^j$ $(i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, s)$. Доказана теорема: Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть n независимых нормально распределенных величины со средними нуль и с дисперсиями единица. Если неоднородная квадратичная форма $Q = \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}' + \mathbf{b}\mathbf{X}'$ и линейная форма $L = \mathbf{c}\mathbf{X}'$ некоррелированы порядка (2, 2), то $\mathbf{c}\mathbf{A} = 0$ и $\mathbf{c}\mathbf{b}' = 0$. В дальнейшем авторы показывают, что последние два условия являются не только необходимыми, но и достаточными условиями стохастической независимости Q и L. М. К. Камалов

6 В4. Характеристическая функция эрмитовых квадратичных форм от комплексных нормально распределенных величин. Turin G. L. The characteristic function

of Hermitian quadratic forms in complex normal variables. «Biometrika», 1960, **47**, № 1-2, 199—201 (англ.)

Пусть $v_n = x_n + iy_n$ $(n = 1, \ldots, N)$ — комплексные случайные величины, вещественная и мнимая части которых имеют совместное нормальное распределение, с ковариациями $\operatorname{cov}(x_m, x_n) = \operatorname{cov}(y_m, y_n)$ и $\operatorname{cov}(x_m, y_n) = -\operatorname{cov}(x_n, y_m)$. Показано, что характеристическая функция квадратичной формы $f = V'^{*}QV$, где Q — эрмитова матрица, а $V' = (v_s, \ldots, v_n)$, равна

$$\varphi(t) = |I - itLQ|^{-1} \exp\{-\overline{V}'^{*}L^{-1} \times \times [I - (I - itLQ)^{-1}]\overline{V}\}, \quad (1)$$

где $\overline{V} = EV$, а L — ковариация между V и V'^{*}. Указывается формула преобразования V, приводящая квадратичную форму, стоящую после знака exp в (1) к диагональному виду. В случае, когда $\overline{V} = 0$, $\varphi(t)$ имеет простой вид, $\varphi(t) = \prod_1^N (1 - it\lambda_n)^{-1}$, здесь λ_n — собственные значения LQ. Автор отмечает, что в общем случае получить точное выражение для плотности f трудно, но для последнего выражения $\varphi(t)$ его можно получить, однако и это распределение в работе не приводится (это распределение приведено референтом; (РЖМат, 1958, 9080). Рассматриваемые здесь вопросы имеют применения в радиотехнике. М. К. Камало

6 В5. Обзор некоторых новых применений теории функций комплексного переменного в теории вероятностей (Тезисы). Линник Ю. В. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 25

6 В6. О максимальном коэффициенте корреляции (Тезисы). Сарманов О. В. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 101—102

6 В7. Случайные величины на бикомпактных полугруппах (Тезисы). Клосс Б. М. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 160—161

6 В8. Об одном свойстве сопровождающих законов (Тезисы). Студнев Ю. П. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 33—34

6 В9. Предельные теоремы для случайных величин на компактных абелевых группах (Тезисы). Клосс Б. М. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 35—37

6 В10. Локальные предельные теоремы для вероятностей больших уклонений. Необходимость условия Крамера. Рихтер Вольфганг. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 55—65

6 В11. Приближение распределений сумм конечнозначных слагаемых неограниченно делимыми законами. Цареградский И. П. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 26—32

6 В12. Предельные теоремы для неоднородных цепей Маркова (Тезисы). Статулявичус В. А. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 45—47

6 В13. Некоторые предельные теоремы для стационарных в узком смысле процессов (Тезисы). Ибрагимов И. А. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 286—287

6 В14. Предельные теоремы для некоторых классов случайных функций. Ченцов Н. Н. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 280—285

6 В15. Некоторые новые результаты по вероятностной теории чисел и моделирование брауновского движения (Тезисы). Кубилюс И. П., Линник Ю. В., Уждавинис Р. В. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 162—163

6 В16. Исправления (к статье Ф. И. Карпелевича, В. Н. Тутубалина, М. Г. Шур «Предельные теоремы для композиций распределений в плоскости и пространстве Лобачевского»). Карпелевич Ф. И., Тутубалин В. Н., Шур М. Г. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, **5**, № 3, 376

См. РЖМат 1960, 14099.

6 В17. Случайные меры и их применения в теории случайных процессов и статистике (Тезисы). Скороход А. В. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 79—82

6 В18. О процессе Пуассона и некоторых его обобщениях. Girault M. Remarques sur le processus de Poisson et sur quelques généralisations. «Rev. franç. rech. opérat.», 1959, **3**, № 12, 145—152 (франц.)

Вводится понятие неоднородного процесса Пуассона и исследуется точечный однородный процесс $\{\xi_t, 0 \leqslant t < \infty\}$ с независимыми приращениями и со скачками, равными k, $k = 1, 2\ldots$ с вероятностями P_k; для ξ_t находится производящая функция, а также распределение длины интервала времени между выходами двух последовательных единиц. Б. А. Рогозин

6 В19. О вторичных процессах, образованных случайным точечным распределением пуассоновского типа. Prékopa András. On secondary processes generated by a random point distribution of Poisson type. «Ann. Univ. scient. budapest. Sec. math.», 1958, **1**, 153—170 (англ.)

Говорят, что в измеримом пространстве (T, S_T) задано случайное точечное распределение, если на некоторой фиксированной σ-алгебре S_Ω подмножеств множества конечных последовательностей $\omega = \{t_i\}$ $(t_i \in T)$ определена вероятностная мера P_1 и если при любом $A \in S_\Omega$ функция $\xi(\omega, A)$, равная числу членов последовательности ω, попавших в A, S_Ω-измерима как функция от ω. Случайное точечное распределение называется распределением пуассоновского типа, если существует такая конечная мера $\lambda(A)$ $(A \in S_T)$, что

$$P_1\{\xi(\omega, A) = k\} = \frac{\lambda^k(A)}{k!} e^{-\lambda(A)} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

В § 1 работы приводятся известные условия Прекопа (РЖМат, 1960, 9213), при которых случайное точечное распределение является распределением пуассоновского типа. В § 2 дана математическая модель для описания «вторичных» событий, часто возникающих в практике (например, продолжительность телефонного разговора после вызова). Именно, пусть в пространстве (T, S_T) задано распределение пуассоновского типа, причем $M[\xi(\omega, A)] = \lambda(A)$ при $A \in S_T$, и пусть имеется измеримое пространство $\{Y, S_Y\}$, в котором реализуются вторичные события. Строится новое пространство Ω_1, точками которого являются конечные последовательности

$$\omega_1 = \{(t_1, y_1), \ldots, (t_n, y_n)\},$$

где $t_i \in T$, $y_i \in Y$. Из подмножеств Ω_1 выделяется σ-алгебра S_{Ω_1}, относительно которой функция $\eta(\omega_1, D)$, равная числу членов последовательности ω_1, принадлежащих D, S_{Ω_1}-измерима как функция от ω_1 при любом D из σ-кольца $S_T \times S_Y$. Предполагается, что на S_{Ω_1} задана вероятностная мера P, и если $D_i = A_i \times C_i$ $(A_i \in S_T, C_i \in S_Y$, $i = 1, \ldots, n)$ и $A_i \cap A_k = 0$ при $i \neq k$, то

$$P\{\eta(\omega_1, D_1) = 1, \ldots, \eta(\omega_1, D_n) = 1 \mid \omega\} = \mu(C_1, t_1) \ldots \mu(C_n, t_n),$$

где $\omega = \{t_i\}$, $t_i \in A_i$, а функция $\mu(C, t)$ является вероятностной мерой на S_Y при любом $t \in T$. Доказывается, что при этом условии описанное точечное распределение в $T \times Y$ является распределением пуассоновского типа. При этом, если $D = A \times C$ $(A \in S_T, C \in S_Y)$, то

$$M[\eta(\omega_1, D)] = \int_C \mu(A, t)\,\lambda(dt). \quad (1)$$

Если D' — произвольный элемент σ-кольца $S_T \times S_Y$, то $M[\eta(\omega_1, D')] = \nu^*(D')$, где ν^* есть продолжение меры (1). Приводятся применения этого утверждения.

М. Г. Шур

6 В20. Рекуррентные цепи Маркова. Orey S. Recurrent Markov chains. «Pacif. J. Math.», 1959, **9**, № 3, 805—827 (англ.)

Изучаются цепи Маркова $\{X_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ со стационарными вероятностями перехода, определенными на измеримом пространстве $(S, \mathfrak{B})$ и удовлетворяющими условию рекуррентности: $\mathfrak{B}$ сепарабельно, существует σ-конечная мера m на $(S, \mathfrak{B})$ такая, что $P\{$попадание во множество E в некоторый момент $| X(0) = x\} = 1$ для всех $x \in S$ и всех $E \in \mathfrak{B}$ с $m(E) > 0$. В § 1 устанавливается связь между условием рекуррентности и известным условием Дёблина (следствие 1. 2В) и доказывается теорема 1:

Если цепь удовлетворяет условию рекуррентности, то S может быть представлено как объединение борелевских множеств S_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ таких, что $S_i \subseteq S_{i+1}$ и при этом борелевское множество A будет принадлежать классу D (D — класс множеств из $\mathfrak{B}$, на которых цепь удовлетворяет условию Дёблина) тогда и только тогда, когда $A \subseteq S_k$ для некоторого k.

В § 2 показано, что при выполнении условия рекуррентности S разбивается на сумму d подмножеств $C_0, C_1, \ldots, C_{d-1}$, которые цепь обходит циклически, и некоторого множества F меры нуль. В § 3 изучено поведение $P^n(x, \cdot)$ случае существования стационарной вероятностной меры

$$Q(E) = \int_S P(x, E)\,Q(dx).$$

В частности, показано, что если $d = 1$, полная вариация $[P^n(x, \cdot) - Q] \to 0$ при $n \to \infty$. В дальнейших §§ рассмотрено асимптотическое поведение

$$U(n) = \sum_{N=1}^{\infty} P\left[\sum_{i=1}^{N} f(X_i) = n\right],$$

где f — измеримая функция на S, принимающая целые значения. Если $\int_S f(x)\,Q(dx) < \infty$, $U(n)$ для больших n приблизительно периодическая. Получена предельная теорема о распределении нормированных сумм

$$\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i),$$

где f — действительная измеримая функция на S (Теорема 5. 1). Интересен метод доказательства этой теоремы, представляющий синтез методов Бернштейна и Дёблина.

В. М. Волков

6 В21. Об одной задаче случайного блуждания (Тезисы). Вилкас Э. И. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 96—97

См. РЖМат, 1960, 7953.

6 В22. Изоморфизм между временными и спектральными областями многомерного регулярного процесса. Masani Pesi. Isomorphie entre les domaines temporel et spectral d'un processus vectoriel, régulier. «C. r. Acad. sci.», 1959, **249**, № 4, 496—498 (франц.)

Заметка содержит в основном теоремы, ранее доказанные Розановым (РЖМат, 1959, 10208), но другим путем. Пусть $x(n) = (x_1(n), \ldots, x_q(n))$ — регулярный стационарный процесс с дискретным временем, H^x — линейная замкнутая оболочка векторов $\{x(n);\ -\infty < n < \infty\}$ (топология в H^x определена при помощи корреляционной матрицы процесса $x(n)$). $F(e^{i\theta})$ — матрица спектральных мер этого процесса. $L_{2,F}$ — пространство матриц-функций, суммируемых в квадрате относительно спектральной меры $F(e^{i\theta})$. Изучаются свойства пространств $L_{2,F}$ и H^x и устанавливается их изоморфизм.

Р. Ф. Матвеев

6 В23. Схемы Бернулли. Ху Чун-фэй. «Шусюэ тунбао, Shuxue tongbao», 1960, № 6, 243—245, 4-я стр. обл. (кит.)

6 В24 К. Элементарное введение в теорию вероятностей. Gnedenko B. W. Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2. verb. Aufl. Übers. aus dem Russ. Berlin, Dtsch. Verl. Wiss., 1960, 135 S., ill., 4.50 DM «Dtsch. Nationalbibliogr.», 1960, **A**, № 18, 1253 (нем.)

6 В25 К. Стохастические процессы: задачи и решения. Takács Lajos. Stochastic processes: problems and solutions. Transl. from the Hung. London, Methuen and Co., Ltd; New York, John Wiley and Sons, Inc., 1960, xi, 137 pp., 18 sh. «Brit. Nat. Bibliogr.», 1960, № 565, 10 (англ.)

Перевод с венгерского.

6 В26 К. Теория марковских процессов. Dynkin E. B. Theory of Markov processes. Transl. from the Russ. Oxford — London — New York — Paris Pergamon Press, 1960, x, 210 pp., 60 sh. (англ.)

Перевод с русского.

6 В27 К. Труды Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике, Ереван, 19—25 сент. 1958 г. Ереван, АН АрмССР, 1960, 292 стр., 11 р. 60 к.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Редактор *Н. В. Смирнов*

6 В28. Аппроксимация, используемая в процедуре расслоения в одномерном случае. Ekman Gunnar. An approximation useful in univariate stratification. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 1, 219—229 (англ.)

Рассматривается задача минимизации суммы $\sum_1^n P_h \sigma_h$, где σ_h — условная дисперсия на интервале (x_{h-1}, x_h), P_h — вероятностная мера интервала (x_{h-1}, x_h) при плотности $f(x)$. Было доказано (Dalenius T, Skand, Aktuarietids, 1950, 203—213), что сумма $\sum_1^n P_h \sigma_h$ минимизируется при выполнении условия

$$\frac{\sigma_h^2 + (x_h - \mu_h)^2}{\sigma_h} = \frac{\sigma_{h+1}^2 + (x_h - \mu_{h+1})^2}{\sigma_{h+1}}, \quad (1)$$

$h = 1, 2, \ldots, n-1$; $x_0 = -\infty$, $x_n = +\infty$; μ_h — условное математическое ожидание в интервале (x_{h-1}, x_h). В статье получена новая аппроксимация для решения предыдущей системы. Показано, что при некоторых ограничениях и при рассмотрении функции плотности на конечном отрезке, точки $\{x_h\}$, удовлетворяющие соотношению

$$(x_h - x_{h-1})\,P_h = C_n, \quad (1a)$$

где C_n — константа, зависящая от n, приближенно удовлетворяют системе (1). Если функция плотности рассматривается не на конечном отрезке, то, кроме (1a), вводятся дополнительные условия. Результаты получены в предположении достаточно большого n. В общих чертах набросан метод нахождения точек $\{x_h\}$, удовлетворяющих условию (1).

В. И. Бабкин

6 В29. Вклад в метод двустадийной выборки. Sukhatme Balkrishna V., Koshal R. S. A contribution to double sampling, «J. Indian Soc. Agric. Statist.», 1959, **11**, № 1-2, 128—144 (англ.)

Пусть основные элементы конечной генеральной совокупности разбиты на множества, которые назовем вторичными элементами, совокупность всех вторичных элементов в свою очередь разбита на множества, которые назовем первичными. С каждым основным элементом e связываются два количественных признака $X(e)$ и $Y(e)$. Ставится задача: на основе выборки наблюдений над X и Y построить оценку для среднего признака $\bar{Y}$, если среднее $\bar{X}$ неизвестно. Автор использует для этой цели следующую процедуру двустадийной выборки:

I стадия. В совокупности первичных элементов производится некоторая случайная выборка. В каждом первичном элементе, попавшем в выборку, производится выборка вторичных элементов и, наконец, в каждом из этих вторичных элементов производится выборка основных элементов. По общей выборке этих основных элементов вычисляется выборочное среднее $\hat{X}$ вспомогательного признака X.

II стадия. В каждой из выборок первичных, вторичных и основных элементов, полученных на I стадии, производятся подвыборки элементов того же разряда и по общей выборке основных элементов вычисляются выборочные средние $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ обоих признаков.

Изучаются свойства «оценки по отношению»

$$\bar{Y}_{\text{отн}} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\hat{X}.$$

Автор вычисляет относительное смещение этой оценки, находит условие, при котором она становится несмещенной, выводит явную формулу для ее дисперсии. Указываются условия, при которых изложенная процедура приводит к более эффективной оценке для $\bar{Y}$, чем обычная случайная выборка. Наконец, приводится пример по анализу данных об урожайности риса в одном районе Египта. И. Ф. Красичков

6 В30. Заметка о стохастической независимости функций от порядковых статистик. Rogers Gerald S. A note on the stochastic independence of functions of order statistics. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 4, 1263—1264 (англ.)

Пусть $x_1 < x_2 \ldots < x_n$ — упорядоченная выборка объема n из непрерывной совокупности. Показывается, что функция от $x_1, \ldots, x_j$ $(j = 1, \ldots, n-1)$ независима с x_k, $j \leqslant k \leqslant n$ при некотором k, тогда и только тогда, когда она независима с вектором $(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. Подобное же утверждение верно для крайних элементов выборки. Задача не решена для дискретных и смешанных распределений. E. Csáki

6 В31. Некоторые замечания к теории оценок. Рао С. Р. «Тр. 3-го Всес. матем. съезда», 1956. Т. 4, М., АН СССР, 1959, 191—192

6 В32. О понятии состоятельной оценки. Ríos S. Sur la notion d'estimateur consistant. «Trabajos Estadist». 1956, **7**, 287—293 (исп.; рез. франц.)

Элементарные следствия из теоремы Гливенко—Кантелли. Р. Л. Добрушин

6 В33. Примеры несостоятельности оценки максимального правдоподобия. Bahadur R. R. Examples of inconsistency of maximum likelihood estimates. «Sankhya, Indian J. Statist.», 1958, **20**, № 3-4, 207—210 (англ.)

Заметка содержит два примера несостоятельности оценки максимального правдоподобия при независимой выборке из фиксированной генеральной совокупности. О. Г. Журавлев

6 В34. О теории наилучших асимптотически нормальных оценок. Wijsman Robert A. On the theory of BAN estimates. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 1, 185—191 (англ.)

Дается новое определение наилучших асимптотически нормальных оценок (BAN — оценок) в случае нескольких параметров, которое не требует их дифференцируемости. Утверждается, что по существу сохраняются все важные теоремы из теории BAN-оценок. В. П. Скитович

6 В35. О статистическом контроле аддитивных признаков. Oderfeld J. O statystycznej kontroli cech addytywnych. «Zastosow. mat.», 1958, **4**, № 1, 95—101 (польск.; рез. русск., англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимая выборка из нормальной совокупности

$$S_w = \sum_{i=1}^{n} \max(x_{2i-1}, x_{2i}),\ S_m = \sum_{i=1}^{n} \min(x_{2i-1}, x_{2i}).$$

В качестве оценки для генерального среднего предлагается $\bar{x} = \frac{1}{2n}(S_w + S_m)$, а в качестве несмещенной оценки генерального стандартного отклонения

$$\rho = \frac{0{,}8862}{n}(S_w - S_m).$$

Эффективность последней оценки равна 0,438. Пусть имеются признаки, для которых легко можно определить S_w и S_m без измерения отдельных элементов выборки. Такие признаки автор называет аддитивными и предлагает для таких признаков малую эффективность оценки компенсировать большим объемом выборки. Приводится контрольная карта для суммы $S_w + S_m$ и разности $S_w - S_m$. J. Perkal

6 В36. Оптимальные доверительные интервалы для дисперсии нормального распределения. Tate R. F., Klett G. W. Optimal confidence intervals for the variance of a normal distribution. «J. Amer. Statist. Assoc.», 1959, **54**, № 287, 674—682 (англ.)

Пусть $x_1, \ldots, x_N$ — независимые случайные величины, распределенные нормально с неизвестными параметрами μ и σ. Предполагается, что доверительный интервал для величины σ^2 имеет вид:

$$\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2/b_{N-1},\ \sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2/a_{N-1}\right),$$

где

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i/N,$$

и приводится таблица значений величин a_N и b_N, соответствующих кратчайшему доверительному интервалу при данном уровне значимости ε для $N = 2, 3, \ldots 29$ и $\varepsilon = 0{,}900;\ 0{,}950;\ 0{,}990;\ 0{,}995;\ 0{,}999$. Приводится также таблица значений величин a_N и b_N, соответствующих несмещенному и «кратчайшему» (в смысле равномерной по μ, σ^2 минимизации вероятности покрытия значения σ^2) доверительному интервалу для σ^2 при данном уровне значимости ε для тех же значений N и ε, что и выше. Кратко описан также метод получения таблиц. А. А. Филлипова

6 В37. Выравнивание гамма-распределений методом максимального правдоподобия. Greenwood J. Arthur, Durand David. Aids for fitting the gamma distribution by maximum likelihood. «Technometrics», 1960, **2**, № 1, 55—65 (англ.)

Оценка максимального правдоподобия для параметра ρ Г-распределения с функцией плотности

$$\frac{1}{\alpha\Gamma(\rho)}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\rho-1} e^{-\frac{x}{\alpha}}$$

приводит к уравнению

$$\ln\rho - \frac{\Gamma'(\rho)}{\Gamma(\rho)} = \ln\frac{A}{g},$$

где A — арифметическое, а g — геометрическое средние выборочных значений. Приводятся таблицы и методы аппроксимации с целью облегчения числового решения этого уравнения. A. Rényi

6 В38. Простые оценки параметров экспоненциальных распределений, когда выборки цензурированы. Epstein Benjamin. Simple estimators of the parameters of exponential distributions when samples are censored. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1956, **8**, № 1, 15—26 (англ.)

Рассматриваются совокупности с плотностями

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta},\quad x>0,\ \theta>0, \tag{1}$$

$$f(x;\theta,A)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-A}{\theta}},\quad 0\leqslant A\leqslant x<\infty,\ \theta>0. \tag{2}$$

Пусть

$$x_{1,n}\leqslant x_{2,n}\leqslant\ldots\leqslant x_{n,n}- \tag{3}$$

вариационный ряд выборки объема n. Исследуются случаи, когда в (3) отсутствуют значения: А) последних $n-r$ членов, Б) первых $a-1$ членов и В) первых $a-1$ и последних $n-b$ членов.

При плотности (1). В случае А) несмещенной оценкой для θ служит

$$\theta^*_{r,n}=\beta_{r,n}x_{r,n},\quad\text{где}\quad \beta_{r,n}=\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{n-j+1}\right)^{-1},$$

причем оценка имеет высокую эффективность; в случае Б) несмещенной оценкой для θ служит

$$\theta^*=\left[(a\beta_{a,n}+a-n)x_{a,n}+\sum_{j=a+1}^{n}x_j\right]\frac{1}{n},$$

причем

$$D\theta^*=[a^2K_{a,n}+(n-a)]\frac{1}{n^2},$$

$$K_{a,n}=\sum_{j=1}^{a}(n-j+1)^{-2}\Big/\left\{\sum_{j=1}^{a}(n-j+1)^{-1}\right\}^2$$

Аналогичным образом приводятся несмещенные оценки для θ в случае В). Для плотности (2) даются несмещенные оценки с наименьшей дисперсией для параметров A и B в случаях А), Б), В) и находятся дисперсии этих оценок. Проводится исследование влияния усечения выборки на дисперсии оценок θ и A. Б. В. Финкельштейн

6 В39. Исследование метода Хартли выравнивания экспоненциальной кривой. Patterson H. D., Lipton S. An investigation of Hartley's method for fitting an exponential curve. «Biometrika», 1959, **46**, № 3-4, 281—292 (англ.)

Авторы сравнивают различные методы оценки параметра ρ в уравнении регрессии $y=\alpha-\beta\rho^x$, где $x=0,1,\ldots,n-1$; $0<\rho<1$. Числовые расчеты показывают, что метод Хартли (Hartley H. O., Biometrika, 1948, 35, 32—45) приводит, вообще говоря, к оценкам, обладающим большой эффективностью, сравнительно с другими методами, обычно употребляемыми на практике. Кроме того, предлагается новый метод, еще до конца не исследованный, который, по мнению авторов, будет обычно иметь также высокую эффективность K. Sarkadi

6 В40. Об оценке параметров таблиц сопряженности, в которых заданы суммы строк и столбцов. I. Weichselberger K. Über die Parameterschätzung bei Kontingenztafeln, deren Randsummen vorgegeben sind. I. «Metrika», 1959, **2**, № 2, 100—130 (нем.)

Пусть элементы генеральной совокупности классифицируются по двум признакам на группы $A_1, A_2,\ldots,A_l$ и $B_1, B_2,\ldots,B_m$ соответственно. Пусть заданы пропорции числа элементов в группах $p_{i\cdot}$ $(i=1,\ldots,l)$ и $p_{\cdot k}$ $(k=1,\ldots,m)$,

$$\sum_{j=1}^{l}p_{i\cdot}=\sum_{k=1}^{m}p_{\cdot k}=1.$$

Производится выборка объема n с целью оценки вероятностей p_{ik} принадлежности элемента к A_i и B_k. От оценок $\hat{p}_{ik}$, кроме обычных условий, еще требуется выполнение граничных условий

$$\sum_{k=1}^{m}\hat{p}_{ik}=p_{i\cdot},\qquad\sum_{i=1}^{l}\hat{p}_{ik}=p_{\cdot k}.$$

Вводятся ограничительные условия: а) $p_{ik}\geqslant\delta>0$, б) для любых строк с номерами i_A и i_E существует последовательность (хотя бы одна) номеров столбцов $k_1, k_2,\ldots,k_\tau$, что для последовательности $(i_A,k_1),(i_2,k_1),(i_2,k_2)\ (i_3,k_2),\ldots,(i_E,k_\tau)$ все частоты $h_{i_Ak_1}, h_{i_2k_1}\ldots h_{i_Ek_\tau}$ появления соответствующих пар признаков в выборке положительны. Для оценки применяется принцип максимального правдоподобия. Обозначив через c_i и d_k неопределенные множители Лагранжа (один из них можно принять произвольным ввиду того, что линейно независимых граничных условий имеется лишь $l+m-1$), получаем для оценок формулы

$$\hat{p}_{ik}=\frac{h_{ik}}{c_i+d_k}.$$

Решение уравнений для определения c_i и d_k представляет трудности. В связи с этим возникает необходимость в итерационном процессе. Последний основан на специальной теореме, доказываемой в статье. Автор показывает единственность получаемой оценки и ее состоятельность. Б. В. Финкельштейн

6 В41. Об оценке параметров таблиц сопряженности, в которых заданы суммы строк и столбцов. II. Weichselberger K. Über die Parameterschätzung bei Kontigenztafeln, deren Randsummen vorgegeben sind. II. «Metrika», 1959, **2**, № 3, 198—229 (нем.)

Излагаются четыре практических правила итерации для получения оценок максимального правдоподобия $\hat{p}_{ik}$ (реф. 6В40). После этого автор рассматривает иной подход — получение оценок, удовлетворяющих заданным граничным условиям и принципу наименьших квадратов. Указывается и другой способ приближения.

Б. В. Финкельштейн

6 В42. Значимость результатов тестов по небольшим группам образцов. Schuette Evan H. The significance of test results from small groups of specimens. «Proc. Amer. Soc. Test. Mater.», 1957 (1958), **57**, 1304—1316. Discuss., 1317—1320 (англ.)

Предлагается метод оценки качества образцов по наименьшим значениям, полученным в небольших выборках одинакового объема. Метод применим независимо от законов распределения генеральных совокупностей. Дается модификация, дающая возможность применения метода при выборках неодинаковых объемов. Выводы, полученные автором, подвергаются резкой критике в приложенном обсуждении ее результатов.

Б. В. Финкельштейн

6 В43. Свойства инвариантов I_m (m нечетно) для распределений, допускающих достаточные статистики. Rao B. Raja. Properties of the invariant I_m(m—odd) for distributions admitting sufficient statistics. «Sankhya, Indian J. Statist.», 1959, **21**, № 3-4, 355—362 (англ.)

Автор распространяет инвариантную меру «расстояния» между двумя функциями плотности

$$I_m=\int\left|f^{\frac{1}{m}}(x,\alpha_1'\ldots\alpha_p')-f^{\frac{1}{m}}(x,\alpha_1\ldots\alpha_p)\right|^m dx$$

($m\geqslant 0$ и четно), введенную Джеффрисом (Jeffreys H., Proc, Roy. Soc. London, ser. A, 1946, **186**, 453—461), на случай нечетного m. Выводится точная формула для подсчета I_m в случаях нормального, биномиального, Пуассона и гамма-распределений. Настоящая статья развивает результаты, полученные Хузурбазаром (РЖМат, 1959, 10228). Ю. И. Медведев

6 В44. Экстремум квадратических форм с применениями в статистике. Bush K. A., Olkin I. Extrema of quadratic forms with applications to statistics. «Biometrika», 1959, **46**, № 3-4, 483—486 (англ.)

Рассматриваются конкретные задачи в выборках по слоям, в проблеме моментов, в дискриминантном анализе и в канонической корреляции, которые сводятся к следующим двум типам: I. Найти $\min_{\mathbf{w}} \mathbf{wAw}'$ такой, что $\mathbf{wB}=a$, где $\mathbf{w}$ — матрица порядка $1\times p$, $\mathbf{A}$ — матрица порядка $p\times p$, $\mathbf{B}$ — матрица порядка $p\times k$ $(p\geqslant k)$ ранга k и a — постоянная величина. II. Найти $\max_{\mathbf{w}} \frac{\mathbf{wAw}'}{\mathbf{wBw}'}$, где $\mathbf{A}$ — положительная полуопределенная матрица порядка $p\times p$, $\mathbf{B}$ — положительно определенная матрица порядка $p\times p$. Для решения этих задач доказываются два неравенства: 1) Если $\mathbf{M}$ — положительно определенная матрица, то

$$(\mathbf{xy}')^2 \leqslant (\mathbf{xMx}')\,(\mathbf{yM}^{-1}\mathbf{y}'),$$

равенство имеет место в том и только в том случае, когда $\mathbf{xM}=\alpha\mathbf{y}$, где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — векторы, α — скаляр.

2) $\theta_m \leqslant \frac{\mathbf{wAw}'}{\mathbf{wBw}'} \leqslant \theta_M$, где $\theta_1,\ldots,\theta_p$ суть корни $|\mathbf{A}-\theta\mathbf{B}|=0$,

$$\theta_m = \min(\theta_1,\ldots,\theta_p),\ \theta_M = \max(\theta_1,\ldots,\theta_p).$$

Далее применяются эти неравенства к решению поставленных выше конкретных задач. М. К. Камалов

6 В45. Выбор совокупности с наибольшим средним в случае, когда сравнения могут быть проведены только попарно. Maurice Rita J. Selection of the population with the largest mean when comparisons can be made only in pairs. «Biometrika», 1958, **45**, № 3-4, 581—586 (англ.)

Рассматриваются несколько совокупностей с одинаковыми дисперсиями. Требуется по результатам их сравнения выбрать ту из совокупностей, которая имеет наибольшее среднее. Для этого используются 2 процедуры: а) сравнение каждой совокупности с каждой другой и б) разбиение совокупностей на пары и выбор в каждой паре «лучшей», разбиение последних на пары и выбор в них «лучших» и т. д. Автор ограничивается сравнением процедур для случая четырех совокупностей, из которых одна с М.о.$=\Theta_1$, а остальные с М.о.$=\Theta_1-\delta$. Автор приводит выражение для вероятности принятия правильного решения в зависимости от числа повторений сравнений в случае применения процедур а) и б). Проводится также сравнение стоимости опытов, обеспечивающих одну и ту же вероятность правильного выбора совокупности.

Б. В. Финкельштейн

6 В46. Оптимальные допустимые (толерантные) области и мощность, когда выборка производится из некоторых не нормально распределенных совокупностей. Guttman Irwin. Optimum tolerance regions and power when sampling from some non-normal universes. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 4, 926—938 (англ.)

Рассматриваются допустимые области (д. о.) с ожиданием β, описанные в работе Фрейзера, Гатмана (РЖМат, 1958, 1377), когда выборка производится из совокупностей, распределенных по показательному закону с плотностью вероятности $\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{1}{\sigma}(x-\mu)}$, а также по «двойному» показательному закону с плотностью $\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{1}{\sigma}|x-\mu|}$. Приводятся таблицы д. о. для всех возможных случаев, когда Γ и σ известны или неизвестны. Даются формулы для определения функции мощности д. о. и приводятся соответствующие таблицы. Случай нормального распределения совокупности был рассмотрен Гатманом ранее (РЖМат, 1958, 7997).

Ю. И. Медведев

6 В47. Статистический контроль отклонений формы деталей от окружности. Klega Vladimír. Statistical quality control of out-of-roundness of machined parts. «Aplikace mat.», 1959, **4**, № 2, 109—125 (англ.; рез. чешск., русск.)

В предположении, что отклонение формы имеет плотность Вейбула

$$\frac{\beta}{\sigma}x^{\beta-1}e^{-\frac{x\beta}{\sigma}},\ x>0,\ \sigma>0,\ \beta>0$$

с параметрами σ и β, β известно, проверяется гипотеза $H_0:\sigma\leqslant\sigma_0$ против альтернативы H_1, $\sigma>\sigma_0$. Для этой цели предложено два критерия: 1) равномерно наиболее мощный, основанный на статистике $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{\beta}$, и 2) критерий, основанный на размахе $\rho_{(ij)}=\xi_{n+1-j}^{\beta}-\xi_i^{\beta}$ между $(n+1-j)$-м и i-м членами вариационного ряда $\xi_1^{\beta},\xi_2^{\beta},\ldots,\xi_n^{\beta}$. Указывается выбор подходящих критических областей. Доказывается теорема об асимптотической нормальности статистики $\rho_{(i,j_1)}$ при условии

$$\lim_{n\to\infty} j_n = \lim_{n\to\infty}(n+1-i_n-j_n),$$

исследуется асимптотическая мощность критерия, основанного на $\rho(i_n,j_n)$ по отношению к альтернативе $H_{1n}:\sigma_{in}=\sigma_0+d_1/\sqrt{n}$ при выполнении добавочного условия:

$$\lim_{n\to\infty} j_n/n = q,\ \lim_{n\to\infty} i_n/n = p.$$

Ю. А. Веретенников

6 В48. Регрессионный анализ причинных путей. Turner Malcolm E., Stevens Charles D. The regression analysis of causal paths. «Biometrics», 1959, **15**, № 2, 236—258 (англ.)

Пусть наблюдаются величины $y_i=\tau_i+\varepsilon_i$, $i=1,\ldots,q$, где ε_i — нормально распределенные независимые величины с нулевым средним, а величина τ_i линейно зависит от некоторых из величин $\xi_1,\ldots,\xi_p$, а также от некоторых из остальных $\eta_1,\ldots,\eta_q$. Величины η_i называются эффектами, ξ_i — факторами в данном эксперименте. Если попарно соединить направленными стрелками все те из $p+q$ величин, между которыми существует причинная связь, то получим диаграмму причинных путей, впервые введенную Райтом (Wright S., Ann. Math. Statistics, 1934, **5**, 161). Рассматриваются различные диаграммы причинных путей. Автор указывает метод и оценки коэффициентов в линейных соотношениях, связывающих факторы и эффекты. В большинстве случаев они сводятся к обычным оценкам для коэффициентов линейной регрессии. Представляет интерес схема, в которой присутствует обратная связь, например какой-либо из эффектов η_i зависит от η_j, и обратно η_j зависит от η_i.

И. Ф. Красичков

6 В49. План в прямоугольной решетке. Schulze Jürgen. Das Rechteckgitter. «Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin. Math.-naturwiss. Reihe», 1959—1960, **9**, № 3, 479—492 (нем.; рез. русск., англ., франц.)

6 В50. Критерии для k выборок, аналогичные критериям Колмогорова — Смирнова и Крамера — Мизеса. Kiefer J. K-sample analogues of the Kolmogorov — Smirnov and Cramér V. Mises tests, «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 2, 420—447 (англ.)

Пусть произведено k независимых выборок объемов n_j $(j=1,\ldots,k)$ из генеральных совокупностей с непрерывными функциями распределения $F_j(x)$, $S_{n_j(x)}^{(j)}$ обозначает эмпирическую функцию распределения для каждой выборки и

$$\overline{S}_N(x) = \sum_{j=1}^{k} n_j S_{n_j}^{(j)}(x) \Big/ \sum_{j=1}^{k} n_j.$$

Для проверки согласованности эмпирических данных с гипотезами

$$H_1: F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_k(x),$$
$$H_2: F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_k(x) = G(x),$$

где $G(x)$ — данное распределение, предлагаются статистики:

$$T_N = \sup_x \sum_{j=1}^{k} n_j \left[S_{n_j}^{(j)}(x) - \overline{S}_N(x) \right]^2,$$
$$T'_N = \sup_x \sum_{j=1}^{k} n_j \left[S_{n_j}^{(j)}(x) - G(x) \right]^2,$$
$$W_N = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} n_j \left[S_{n_j}^{(j)}(x) - \overline{S}_N(x) \right]^2 d\overline{S}_N(x),$$
$$W'_N = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} n_j \left[S_{n_j}^{(j)}(x) - G(x) \right]^2 dG(x),$$

распределение которых при H_2 не зависит от $G(x)$ и находятся соответствующие предельные распределения $\Phi_k(x^2)$, $\Phi'_k(x^2)$, $B_k(x)$, $B'_k(x)$. При этом $\Phi_k(x) = \Phi'_{k+1}(x)$, $B_k(x) = B'_{k+1}(x)$. Приведены таблицы распределений $\Phi_k(x)$ и $B_k(x)$ для $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Примечание референта. Предельное распределение $\Phi_k(x)$ было найдено в работе референта (РЖМат, 1959, 1809). И. И. Гихман

6 В51. Об одном непараметрическом критерии для двух выборок в случае, когда имеются связи. Hudimoto Hirosi. On a two-sample non-parametric test in the case that ties are present. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1959, **11**, № 2, 113—120 (англ.)

Область значений случайных величин X и Y с функциями распределения соответственно $F(t)$ и $G(t)$ разбита на классы, и наблюденные значения считаются сосредоточенными в центрах ξ_i своих классов. Величина

$$\hat{h}(F, G) = \frac{1}{2} \sum_i \left[\hat{G}_i \hat{f}_i - \hat{F}_i \hat{g}_i \right],$$

где $\hat{f}_i$ и $\hat{g}_i$ — частоты соответственно $\{X = \xi_i\}$ и $\{Y = \xi_i\}$,

$$\hat{F}_i = \sum_{\alpha=0}^{i} \hat{f}_\alpha, \quad \hat{G}_i = \sum_{\beta=0}^{i} \hat{g}_\beta,$$

есть эмпирический аналог выражения $P\{X > Y\} + \frac{1}{2} P\{X = Y\} - \frac{1}{2}$ и может служить для проверки гипотезы $F \equiv G$ против альтернативы $F < G$. Для случая $F(t) = G(t) = 0$ при $t \leqslant 0$, $F(t) = f_0 + (1 - f_0) F^*(t)$, $G(t) = g_0 + (1 - g_0) G^*(t)$ при $t > 0$ выводятся неравенства, позволяющие строить критическую область с уровнем значимости, меньшим заданного. Д. М. Чибисов

6 В52. Непараметрическая процедура, основанная на сумме рангов, для относительного разброса в неспаренных выборках. Siegel Sidney, Tukey John W. A nonparametric sum of ranks procedure for relative spread in unpaired samples. «J. Amer. Statist. Assoc.», 1960, **55**, № 291, 429—445 (англ.)

Для проверки гипотезы о тождественности функций распределения двух независимых выборок против альтернативы, состоящей в том, что эти функции распределения при одинаковых (или близких) медианах имеют различный разброс, предлагается следующий критерий: результаты наблюдений из обоих выборок располагаются в общий вариационный ряд и нумеруются от концов ряда к середине: 1,4,5, ...,7,6,3,2. Критерием служит сумма номеров, соответствующих членам одной выборки. Для уровней значимости (в %) 0; 0,4; 0,5; 1; 2,5; 5; 10 и объемов выборок $\leqslant 20$ приводятся таблицы верхних и нижних критических значений. Отмечается, что те же таблицы пригодны для критерия Уилкоксона. Для больших объемов выборок указываются приближенные способы нахождения критических значений.

Д. М. Чибисов

6 В53. Предельное распределение порядкового коэффициента корреляции в случае «взрыва». II. White John S. The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case. II. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 3, 831—834 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1960, 663. Пусть $\hat{\alpha}$ и $\hat{\sigma^2}$ — оценки максимального правдоподобия для параметров разностного уравнения

$$x_t = \alpha x_{t-1} + u_t \quad (t = 1, 2, \ldots, T),$$

где u_t — независимые $N(0, \sigma^2)$ возмущения. Тогда предельное распределение величины

$$W = \frac{(\hat{\alpha} - \alpha)}{\hat{\sigma}} \left(\sum x_{t-1}^2 \right)^{1/2}$$

нормально, исключая, быть может, случай $|\alpha| = 1$. Для $|\alpha| < 1$ это доказано Манном и Вальдом даже при более общих условиях (Mann H. B., Wald A., Econometrika, 1943, **11**, 173—200). В заметке этот результат получен для случая «взрыва» ($|\alpha| > 1$). А. П. Хусу

6 В54. О некотором семействе распределений коэффициентов запаздывания. Solow Robert M. On a family of lag distributions. «Econometrica», 1960, **28**, №, 2 393—406 (англ.)

Рассматривается схема

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x_{t-i} + u_t, \qquad (1)$$

где y_t и x_t — наблюдаемые неслучайные временные ряды, а u_t — случайная последовательность. В предположении, что коэффициенты a_i задаются формулами

$$a_i = \beta C_{r+i-1}^{i} (1 - \lambda)^r \lambda^i,$$

где β, λ и r — неизвестные параметры, причем $\beta > 0$, $0 < \lambda < 1$ и r — натуральное число, автор предлагает несколько способов оценки неизвестных параметров. Например, представив соотношение (1) в виде

$$y_t - C_r^1 \lambda y_{t-1} + C_r^2 \lambda^2 y_{t-2} + \ldots + (-1)^r \lambda^r y_{t-r} = \beta (1 - \lambda)^r x_t + v_t,$$

где v_t — некоторая новая случайная последовательность, и, предполагая, что v_t некоррелированы, автор строит обычные оценки наименьших квадратов для β и λ. В случае, когда величины u_t некоррелированы, строится оценка «наименьших взвешенных квадратов». В заключение обсуждается вопрос о возможности применения рассмотренной задачи к эконометрике. М. И. Фортус

6 В55 К. Методика обработки массовых измерений и анализ частот. Daeves Karl, Beckel August. Großzahl-Methodik und Häufigkeits-Analyse. 2., völlig überarb. und stark erw. Aufl. von «Großzahl-Forschung und Häufigkeits-Analyse». Weinheim/Bergst., Verl. Chemie, GmbH, 1958, 143 S., ill. (нем.)

Так же как и в первом издании этой книги, вышедшей в 1948 г., авторы имели в виду прежде всего интересы практических работников — инженеров, химиков, врачей, биологов и других специалистов, применяющих статистические методы в своей работе. Содержание книги кратко описывается следующим оглавлением: 1. Как получаются знания? 2. Цель массовых исследований. 3. Общая методика. 4. Методы больших чисел. 5. Сравнимость показателей. 6. Анализ распределения частот. 7. Вероятностная сетка и нормальное распределение. 8. Нормальное распределение при переменном масштабе оси абсцисс. 9. Разложение смешанной совокупности. 10. Пополнение неполного распределения. 11. Подсчеты частот. 12. Общие замечания об оценках. 13. Границы оценок. 14. Обсуждения экономических показателей. 15. Представление развития экономики. 16. Примеры приложения статистики. 17. Приложимость методики, основанной на массовом измерении. 18. Развитие приложений статистических методов в последние годы. 19. Итоги. Н. В. Смирнов

6 В56 К. Информация и ошибки: введение в статистический анализ. Diamond Solomon. Information and error: an introduction to statistical analysis. New York, Basic Books; London, Mayflower, 1959, xii, 307 pp., ill., 40 sh. «Brit. Nat. Bibliogr.», 1960, № 552, 11 (англ.)

6 В57 К. Принципы регрессионного анализа. Plackett Robert Lewis. Principles of regression analysis. Oxford, Clarendon Press, 1960, ix, 174 pp., ill., 35 sh. «Brit. Nat. Bibliogr.», 1960, № 565, 10 (англ.)

6 В58 К. Анализ временных рядов. Hannan E. J. Time series analysis. London, Methuen and Co., Ltd; New York, John Wiley and Sons. Inc., 1960, viii, 152 pp., ill., 21 sh. «Brit. Nat. Bibliogr.», 1960, № 559, 10 (англ.)

ТЕОРИЯ ИГР, ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Редактор *Н. Н. Воробьев*

6 В59. Деятельность Джона фон-Неймана в области теории игр и математической экономики. Kuhn H. W., Tucker A. W. John Von Neumann's work in the theory of games and mathematical economics. «Bull. Amer. Math. Soc.», 1958, **64**, № 3, Part 2, 100—122 (англ.)

Основным достижением Дж. Неймана в теории игр авторы считают формулировку и доказательство теоремы о минимаксе.

В 1-й части статьи описываются фундаментальные новые понятия, введенные Дж. Нейманом в целях обоснования и развития теории игр и линейной экономики. К их числу относятся понятия характеристической функции, дележа (imputation) и доминирования в теории кооперативных игр, а также концепции позиционной игры, функции полезности и экономического равновесия.

2-я часть посвящена теореме о минимаксе в связи с теоремами о неподвижной точке, теорией дифференциальных уравнений (градиентный метод), методом последовательных приближений алгебраическими методами (двойственность) и комбинаторикой (задача о назначениях).

В библиографии —11 публикаций Неймана и 30 работ других авторов. Н. Н. Воробьев

6 В60. Финитарные игры. Isbell J. R. Finitary games. «Ann. Math. Studies», 1957, № 39, 79—96 (англ.)

Определение финитарной игры отличается от определения позиционной игры (РЖМат, 1956, 4717, а также 1960, 8018) отсутствием требования о непредшествовании каждого из информационных множеств самому себе (обычные позиционные игры при этом называются линейными). Аналогичные игры возможно бесконечной продолжительности с нулевыми выигрышами в бесконечных партиях называются финитарными. Если по-прежнему понимать смешанную стратегию игрока как случайную функцию на семействе информационных множеств, то она уже не будет, вообще говоря, вероятностной мерой на множестве чистых стратегий этого игрока, так как сумма вероятностей всех чистых стратегий может оказаться меньшей, чем единица (смешанные стратегии, сохраняющие это свойство, называются линейными). Доказывается (на основе теоремы Какутани о неподвижной точке), что всякая финитарная игра имеет ситуации равновесия в смешанных стратегиях. На основе разложения игры на подыгру и факторигру (difference game) рассматриваются композиционные ряды игры. Исследование факторов композиционных рядов финитарных игр сводится к изучению стохастических игр Шепли (РЖМат, 1957, 1656). В заключение рассматриваются программные игры, являющиеся моделями некоторых тактических задач. Н. Н. Воробьев

6 В61. Абсолютные игры. Isbell J. R. Absolute games. «Ann. Math. Studies», 1959, **4**, № 40, 357—396 (англ.)

Дается новый подход к теории кооперативных игр, который допускает непрерывную, но не обязательно линейную (как у Неймана) передачу выигрыша (transfers of utility). Рассматривается игра с множеством игроков $N=\{1, 2,..., n\}$ и пространством всех дележей I_N, являющимся декартовым произведением n интервалов (0,1). Верхушкой (top) слабой верхушкой (weak top) некоторого множества дележей называется множеством максимальных (слабо максимальных) дележей, т. е. таких дележей X, для которых не существует Y таких, что $X \leqslant Y$ ($X<Y$). Рассматривается «игра угрозы», которая здесь имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях. Затем рассматривается так называемая «окончательная игра» (end game), являющаяся обобщением «bargaining problem». «Абсолютной игрой» называется система, состоящая из множества игроков, пространства стратегией, пространства (симплекса) выигрышей, функции выигрыша, отображающей пространство ситуаций на пространство выигрышей и вогнутой окончательной функцией выигрыша (end-game-valued), которая отображает пространство выигрышей на его слабую верхушку. Для решения окончательных игр вводится арбитражная схема, которая является распространением на этот случай арбитражной схемы Рейффы (Raiffa H., Ann. Math. Study, 1953, **28**, 361—387). Следуя основной идее Неймана, автор рассматривает игру двух лиц (двух групп игроков) и вводит аналог характеристических функций, названный «проективной формой», которая здесь зависит от арбитражной схемы. Рассматривается частная арбитражная схема, называемая пропорциональной (ration) схемой, которая заключается в том, что если игра двух лиц имеет «точку угрозы» (X, Y), то арбитражное решение есть максимальный возможный дележ вида (tX, tY). Игра двух лиц имеет решение, если существует дележ $v=(v_1, v_2)$ и стратегии x_1, x_2 соответственно первого и второго игрока такие, что 1) v принадлежит слабой верхушке множества всех дележей; 2) для любой стратегии второго игрока y_2:

$$H_1(x_1, y_2) \geqslant v_1,\ H_2(x_1, y_2) \leqslant v_2;$$

3) для любой стратегии первого игрока y_1:

$$H_2(y_1, x_2) \geqslant v_2,\ H_1(y_1, x_2) \leqslant v_1.$$

Доказывается ряд положений относительно существования решений игр двух лиц при некоторых условиях, наложенных на функцию выигрыша и арбитражную схему. Рассматриваются абсолютные игры трех лиц и приводится пример. О. Н. Бондарева

6 В62. Однородные игры. II. Isbell J. R. Homogeneous games. II. «Proc. Amer. Math. Soc.», 1960, **11**, № 2, 159—161 (англ.),

Продолжение статьи автора (РЖМат, 1959, 1816). Описываются строгие простые однородные игры n лиц для некоторых значений n вида $2^k(2^l-1)$, где k и $l>k$— целые (именно если n есть число Мерсенна или же $l=4, 6$). Задача сводится к построению транзитивной группы подстановок, каждый элемент которой имеет хотя бы один цикл нечетного порядка. Н. Н. Воробьев

6 В63. Теория игр и ее применение. Elfving G. Spelteori och samhällsmönster, «Årsbok. Soc. scient. fennica, 1959—1960. Bd 38. Helsingfors», 1960, **B**, № 1, 1—14 (шведск.)

6 В64. Увеличение пропускной способности сети — параметрическая задача о распределении капиталовложений. Fulkerson D. R. Increasing the capacity of a network: the parametric budget problem. «Manag. Sci.», 1959, **5**, № 4, 472—483 (англ.)

Обычная задача о максимальном потоке через сеть, участки которых обладают ограниченными пропускными способностями. Для увеличения пропускных способностей участков сети требуются капитальные вложения, эффект которых зависит от участка и пропорционален их величине. Сумма капиталовложений задана. Эта за-

дача является задачей линейного программирования. Рассматривается вспомогательная задача о максимальном «рентабельном» потоке через сеть с увеличивающимися пропускными способностями при заданной оплате единицы потока. Оплата потока является параметром задачи. Строится алгорифм для решения этой вспомогательной задачи и для получения из него решения исходной задачи. Предложенный автором алгорифм может быть упрощен за счет того, что можно рассматривать не все значения параметра. И. В. Романовский

6 В65. Конструирование максимальных динамических потоков из статических потоков. Ford L. R., Jr., Fulkerson D. R. Constructing maximal dynamic flows from static flows. «Operat. Res.», 1958, **6**, № 3, 419—433 (англ.)

Имеется транспортная сеть с одним источником и одним стоком. Для каждого участка этой сети заданы два числа — время перевозки и пропускная способность за единицу времени. Требуется за данное время T перевезти максимальный груз от источника до стока. Эта задача приводится к задаче линейного программирования. Указывается алгорифм для решения этой задачи. Отмечается, что при реализации этого алгорифма в качестве побочного продукта получается решение задачи для любого времени перевозки, меньшего, чем T. Отмечается, что при достаточно большом времени T наступает стабилизация потоков. И. В. Романовский

6 В66. Использование преобразования звезды в треугольник при упрощении сетей. Akers Sheldon B., Jr. The use of wye-delta transformations in network simplification. «Operat. Res.», 1960, **8**, № 3, 311—323 (англ.)

Хорошо известные преобразования электрических сетей используются при решении экстремальных задач на графах (задачи о максимальном потоке и о кратчайшем пути через лабиринт). Автор предлагает следующие преобразования: а) Последовательные участки объединяются в один участок с минимальной пропускной способностью в случае первой задачи и с суммарной длиной — в случае второй задачи. б) Параллельные участки заменяются одним с суммарной пропускной способностью или соответственно минимальной длиной. в) Мостик с большой пропускной способностью (превышающей суммарную пропускную способность остальных путей, подходящих к вершине) уничтожается без нарушения связности; участок, который длиннее возможного обходного пути, удаляется из сети; г) Участки, образующие треугольник, можно заменить звездой и наоборот Формулы перечета таковы:

для пропускных способностей

$$\begin{aligned} C_a &= C_1 + C_3, & C_1 &= [C_a + C_b - C_c]^+/2, \\ C_b &= C_1 + C_2, & C_2 &= [C_b + C_c - C_a]^+/2, \\ C_c &= C_2 + C_3, & C_3 &= [C_c + C_a - C_b]^+/2; \end{aligned}$$

для длин

$$\begin{aligned} l_a &= (l_1 + l_3 - l_2)/2, & l_1 &= l_a + l_b, \\ l_b &= (l_1 + l_2 - l_3)/2, & l_2 &= l_b + l_c, \\ l_c &= (l_2 + l_3 - l_1)/2, & l_3 &= l_c + l_a. \end{aligned}$$

Отмечается интересная двойственность между задачей о максимальном потоке через плоскую сеть и задачей о кратчайшем пути через плоский лабиринт.

И. В. Романовский

6 В67. Переходные (неустановившиеся) потоки в сетях. Gale David. Transient flows in networks. «Michigan Math.», 1959, **6**, № 1, 59—63 (англ.)

Доказывается, что в задаче о динамических потоках через сеть (реф. 6В65) существует решение, обладающее свойством «универсальности»: при любом времени, меньшем чем требуемое, план доставки также будет обеспечивать максимум. И. В. Романовский

6 В68. Метод нахождения кратчайшего пути в дорожной сети. Whiting P. D., Hillier J. A. A method for finding the shortest route through a road network. «Operat. Res. Quart.», 1960, **11**, № 1-2, 37—40 (англ.)

Рассматривается задача: среди всех расстояний между пунктами в дорожной сети найти кратчайшее. Выберем начальный пункт P_0 и все пункты расположим в порядке возрастания их расстояний от P_0: $P_1, P_2, \ldots$ с расстояниями $d_1, d_2, \ldots$, где $d_1 \leqslant d_2 \leqslant d_3 \leqslant \ldots$. Авторы предлагают метод нахождения P_{r+1} и d_{r+1}, если уже найдены $P_0, \ldots, P_r$ и $d_1, \ldots, d_r$. А. Н. Ляпунов

6 В69. Решения задачи о кратчайшем пути. Обзор. Pollack Maurice, Wiebenson Walter. Solutions of the shortest-route problem (A review). «Operat. Res.», 1960, **8**, № 2, 224—230 (англ.)

Имеется в виду задача о нахождении кратчайшего пути между двумя точками заданного лабиринта. Излагаются алгорифмы Данцига (РЖМат, 1958, 6018), Мура (РЖМат, 1961, 5В78) в усовершенствованном изложении д'Эзопо, Белмана—Шимбеля (РЖМат, 1959, 5024) и следующий непубликовавшийся алгорифм Минти: 1. Пометить вход в лабиринт расстоянием «0». Перейти к 2. 2. Рассмотреть все участки, у которых один конец помечен, а второй нет. Для каждого такого участка образовать сумму пометки в начале участка и длины участка, выбрать минимальную из сумм и пометить ею конец соответствующего участка. Повторить 2 сначала. Библ. 10 назв. И. В. Романовский

6 В70. Об одном классе транспортных задач. Gill Arthur. On a class of transportation problems. «J. Math. and Phys.», 1960, **39**, № 1, 76—82 (англ.)

Рассмотренная автором задача допускает следующую интерпретацию: грузотакси обслуживает шоссе и может выполнить одновременно только один заказ. Поступило N заказов на перевозку (в каждом заказе указано место выезда и место назначения). Требуется определить очередность заказов, минимизирующую холостой пробег. Задача приводится к задаче о бродячем торговце. Приводится алгорифм для ее решения (по-видимому, недостаточно эффективный для решения любых подобных задач). И. В. Романовский

6 В71. Замечание о стохастическом линейном программировании. Tintner Gerhard. A note on stochastic linear programming. «Econometrica», 1960, **28**, № 2, 490—495 (англ.)

Описывается разница между детерминированным и стохастическим линейным программированием. Последнее подразделяется на пассивное (случай принятия решений после определения параметров) и активное (до определения параметров). Приводятся примеры. Библ. 15 назв. И. В. Романовский

6 В72. О задаче алгебраического минимакса конечной системы линейных уравнений. I, II. Ремез Е. Я. «Укр. матем. ж.», 1958, **10**, № 2, 178—192; № 3, 289—298 (рез. франц.)

6 В73. Линейное программирование — математический аппарат для обслуживания контрагентов. Cansado Enrique. Linear programming, a mathematical instrument in the service of contractors. «Trabajos Estadist.», 1956, **7**, 305—335 (англ.)

Обзорная статья.

6 В74. Об эквивалентности обобщенной транспортной задачи и задачи о сетях. Berge Claude. Sur l'équivalence du problème du transport généralisé et du problème des réseaux. «C. r. Acad. sci.», 1960, **251**, № 3, 324—326 (франц.)

Пусть G—конечный ориентированный граф. Назовем потоком заданную на его дугах функцию x такую, что сумма значений функции на дугах, входящих в любую вершину, равна сумме значений на дугах, исходящих из этой вершины (поток без источников и стоков). Это означает, что если S-матрица инциденций графа, то $Sx = 0$. Напряжением назовем заданный на дугах гра-

фа вектор $z = S^*t$, где t — любой вектор, заданный на вершинах.

I. Обобщенная транспортная задача. Построить поток x, обладающий следующими свойствами: 1) поток x_i через дугу i лежит в заданных пределах: $b_i \leqslant x_i \leqslant c_i$; 2) поток через дугу 0 принимает максимальное возможное значение; 3) $\sum_{i \neq 0} f_i(x_i) = \min$, где f_i — дифференцируемые функции, заданные на $[b_i, c_i]$.

II. Фундаментальная задача о сетях. Построить поток x, обладающий свойствами 1), 2) и

4) Существует такое напряжение z, что при всех i

$$\begin{aligned} z_i &\in [-\infty, f_i'(b_i)] && \text{при } x_i = b_i, \\ z_i &= f_i'(x_i) && \text{при } b_i < x < c_i, \\ z_i &\in [f_i'(c_i), \infty] && \text{при } x_i = c_i. \end{aligned}$$

Доказывается, что каждое решение задачи I есть решение задачи II и если f_i — выпуклые функции, то каждое решение II есть решение I. В доказательстве используется теорема Куна—Таккера о нелинейном программировании. И. В. Романовский

6 В75. Решение транспортной задачи с нелинейными ценами. Shetty C. M. A solution to the transportation problem with nonlinear costs. «Operat. Res.», 1959, **7**, № 5, 571—580 (англ.)

Исследуется задача о минимизации стоимости изготовления и перевозки продукции при заданном спросе, когда цена производства является вогнутой функцией размеров производства. Дается алгорифм решения. Приводится пример. Указанный автором критерий оптимальности не используется в решении (здесь возможно применение метода потенциалов). И. В. Романовский

6 В76. Максимальная эффективность инспекции путем линейного программирования. Sandler Gerald H. Maximum inspection efficiency by linear programming, «Proc. 5th Nat. Sympos. Reliabil. and Qual. Control Electron». (1959, Philadelphia, Pa). New York, N. Y., Inst. Radio Engrs, 1959, 217—223 (англ.)

Продукция проходит несколько этапов проверки, на каждом из которых исправляются различные недостатки. Стоимость исправления возрастает, если в изделии остались дефекты, подлежавшие устранению на прежних этапах. Доля изделий, лишенных дефекта i, после T часов проверки на соответствующем этапе находится из уравнения:

$$T = \beta_0 + \beta_i R_i + \beta_i' R_i^2,$$

где β_0, β_i, β_i' — известные параметры. Требуется найти распределение часов работы по этапам, минимизирующее стоимость исправления, если доля изделий, лишенных каждого из дефектов, должна превышать уровень $\hat{R}$. Поставив эту задачу, автор кратко поясняет, как она может быть решена с помощью линейного программирования. С. С. Кислицын

6 В77. Логарифмические программы. Приложение к вычислениям выпуклых программ, особенно линейных. Parisot G. R. Les programmes logarithmiques — application au calcul des programmes convexes, specialement linéaires. «Informat. processing». Paris—München—London, 1960, 93—97, Discuss., 97—98 (франц.; рез. англ., нем., русск., исп.)

6 В78. Динамическое программирование и адаптивные процессы: математическая основа. Bellman R., Kalaba R. Dynamic programming and adaptive processes: mathematical foundation. «IRE Trans. Automat. Control», 1960, **5**, № 1, 5—10 (англ.)

Адаптивными контролируемыми процессами называются процессы, контролирующий элемент которых может получать во время хода процесса дополнительную информацию о нем, т. е. может адаптироваться к окружающей среде. Дается математическая трактовка широкого класса адаптивных процессов путем использования концепции динамического программирования. Е. Б. Яновская

6 В79. О приложении теории динамического программирования к изучению контролируемых процессов. Bellman Richard. On the application of the theory of dynamic programming to the study of control processes. «Proc. Sympos. Nonlinear Circuit Analysis (1956, New York, N. Y.), Brooklyn, N. Y., 1957, 199—213 (англ.)

6 В80. Об адаптивных контролируемых процессах. Braun L., Jr. On adaptive control systems. «IRE Nat. Convent. Rec.», 1959, **7**, № 4, 32—44 (англ.)

Излагаются основные факты, связанные с адаптивными контролируемыми системами. Основное внимание обращается на вычислительную сторону вопроса. Н. Н. Воробьев

6 В81. Об одном вопросе динамического программирования (задача о золотодобыче). Akama Hachiro. Un aspect de la programmation dynamique (problème des mines d'or). «Cahiers Bur. univ. rech. operat.», 1957, № 2, 27—36 (франц.)

Обобщение задачи о золотодобыче на случай произвольного числа приисков. Составляется и исследуется функциональное уравнение Р. Беллмана. И. В. Романовский

6 В82. Вычислительный метод для динамического линейного программирования. Фукао «Дэнки сикэнсё ихо, Bull. Electrotechn. Lab.», 1960, **24**, № 1, 34—41, 77 (японск.; рез. англ.)

6 В83. Об одной трудности теории риска. Guilbaud G. Sur une difficulté de la théorie du risque, «Econométrie». Paris, CNRS, 1953, 19—25. Discuss., 25—28 (франц.)

Пусть A предпочтительнее, чем B, а B предпочтительнее, чем C ($A > B > C$). Тогда, согласно классической теории выбора, существует такое a_0, что при $a < a_0$ ситуация B предпочтительнее, чем ситуация, когда с вероятностью a происходит A и с вероятностью $1-a$ происходит C; при $a > a_0$ дело обстоит наоборот, а при $a = a_0$ выбор между ситуациями безразличен. Автор указывает на желательность следующих изменений теории: 1) «зону безразличия» лучше брать в виде интервала; 2) ввести в рассмотрение смешанные стратегии. С. С. Кислицын

6 В84. Об экономической классификации случайных перспектив. Massé P., Morlat G. Sur le classement économique des perspectives aléatoires. «Econométrie», Paris, CNRS, 1953, 165—193. Discuss., 194—199 (франц.)

Статья обзорного характера. Рассматриваются вопросы, связанные с аксиоматикой теории выгоды. С. С. Кислицын

6 В85. Политика инвестиций и индексы. Haycocks H. W., Plymen J. Investment policy and index numbers. «J. Inst. Actuar.», 1956, **82**, 333—371. Discuss., 372—390 (англ.)

Цель авторов состоит в том, чтобы дать обзор некоторых изменений, которые произошли в принципах и практике политики инвестиций за последние 25 лет, и изучить то новое, что могут дать индексы. Для этого исследуется Actuaries' Investment Index. В статье в свете современных условий описываются методы, использованные при создании и утверждении индексов. Сравниваются методы вычисления и полезность этих индексов и индексов конкуренции. Отмечены некоторые интересные свойства среднего геометрического, которые используются для построения индексов цен акций. Далее исследуются полученные индексы. Эта часть работы содержит как теоретические результаты, так и результаты исследования данных, взятых из рабочих записей Actuaries' Investment Index. Сравниваются результаты исследования обыкновенных акций, дающих низшую,

среднюю и высшую прибыль. Группа, дающая низшую прибыль, оказалась самой выгодной. L. Törnqvist
Перевод из Math, Revs, 1957, **18**, № 8, 708.

6 В86. О математическом моделировании в экономике (химического производства). Ter-Manuelianc A. O matematickém modelování v ekonomice. «Chem. průmysl.», 1960, **10**, № 8, 414—417 (чешск.)

6 В87. Предсказание спроса. I, II, III. Мацуда. Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1957, **2**, № 1, 47—52; № 2, 100—105; № 3, 151—155 (японск.)

6 В88. О решении стохастических леонтьевских систем. Quandt Richard E. On the solution of probabilistic Leontief systems. «Naval Res. Logist. Quart.», 1959, **6**, № 4, 295—305 (англ.)

Рассматривается модель Леонтьева при условии, что технические коэффициенты a_{ij} задаются со случайными независимыми ошибками e_{ij}, распределения которых таковы, что

$$a_{ij} + e_{ij} \geqslant 0 \text{ для всех } i \text{ и } j,$$

$$\sum_i (a_{ij} + e_{ij}) < 1 \text{ для всех } j,$$

а в остальном неизвестны. Описываются выборочные эксперименты, на основе которых сделан вывод, что решение стохастической леонтьевской системы хорошо описывается логарифмически нормальным распределением независимо от распределения ошибок. К. А. Горькова

6 В89. О некоторых моделях планирования сбыта. Piesch W. Über einige Modelle der Absatzplanung. «Unternehmensforschung», 1959, **3**, № 2, 51—69 (нем.; рез. англ.)

Методами линейного программирования рассмотрена задача планирования производства, сходная с известной задачей о сглаживании. Та же задача в предположениях наличия штрафных издержек и случайного спроса с постоянной плотностью сводится к задаче квадратичного программирования, которая аппроксимируется задачей линейного программирования. А. А. Корбут

6 В90. Несколько примеров исследования операций. Rios Sixto. Quelques exemples de recherche opérationnelle. «Calcul probabilités et applic.» Paris, CNRS, 1959, 113—118. Discuss., 119—121 (франц.)

Отчет о некоторых работах по исследованию операций, проделанных в Испании. Рассматривался вопрос о рациональной стандартизации ростов и размеров мужской одежды, а также задача о минимальном пробеге, сводящаяся к задаче Штейнера (найти точку на плоскости, сумма расстояний которой до нескольких заданных точек минимальна). А. А. Корбут

6 В91. Применение методов исследования операций по программе совершенствования вооружений. Malcolm D. C., Roseboom J. H., Clark C. E., Fazar W. Application of a technique for research and development program evaluation. «Operat. Res.», 1959, **7**, № 5, 646—669 (англ.)

Подробный отчет о работе группы исследования операций в отделе баллистических ракет военно-морского флота США по программе «Поларис». В частности, описаны основные примененные при этом модельные схемы, намечены способы их анализа на электронных вычислительных машинах, обсуждены предварительные результаты этого анализа и некоторые перспективы.
А. А. Корбут

6 В92. Исследование операций в рекламном деле.— Operational research in advertising. «Nature», 1958, **182**, № 4639, 846 (англ.)

Указываются физиологическая, биологическая и физическая аналогии для моделей рекламного дела.

6 В93. Игра на повышение квоты в тотализаторе. Cucconi Odoardo. L'aggiotaggio delle quote del totalizzatore. «Archimede», 1960, **12**, № 2, 81—85 (итал.)

В соревнованиях участвует n лошадей с номерами $1, 2, \ldots, n$. В случае прихода первым номера i на каждую единицу ставки, сделанной на этот номер, выплачивается сумма q_i, равная $0{,}8\,M/m_i$, где m_i — сумма ставок на номер i, а $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$. Вероятность выигрыша номера i предполагается равной m_i/M $(i = 1, 2, \ldots, n)$. После того, как были сделаны ставки m_i, в игру вступает новый участник. Сумму X он расходует на повышение q_j до q_j', делая ставки x_i на остальные номера $\left(\sum_{i \neq j}^{n} x_i = X\right)$, а затем заключает с кем-нибудь пари, получая сумму $q_j'k$ в случае прихода первым номера j и уплачивая сумму k в противном случае. Находятся значения x_i, максимизирующие м. о. выигрыша при такой системе игры для фиксированного k. С. С. Кислицын

6 В94. Игра на повышение квоты в тотализаторе. Cucconi Odoardo. L'aggiotaggio delle quote del totalizzatore. «Archimede», 1960, **12**, № 3, 135—141 (итал.)

Окончание статьи (начало, терминологию и обозначения см. реф. 6В93). Рассматривается ситуация, когда игрок расходует сумму X для изменения ставок на $w < n$ номерах, а сумму P — для заключения пари. Находятся x_i, максимизирующие м. о. выигрыша при фиксированном P. С. С. Кислицын

6 В95. Новое доказательство правила оптимального упорядочения при обработке n деталей на двух машинах. Giardina Basilio. An alternate proof of optimal sequencing decision rule for n items on two wachines. «Boll. Centro ricerca operat.», 1957, № 5-6, 14—18 (англ.)

Дано новое доказательство известного результата С. Джонсона (РЖМат, 1959, 718, а также РЖМат, 1957, 6551) относительно основной задачи теории расписаний для случая двух машин. А. А. Корбут

6 В96. Определение последовательности выполнения n работ на двух машинах с произвольными запаздываниями во времени. Mitten L. G. Sequencing n jobs on two machines with arbitrary time lags. «Manag. Sci.», 1959, **5**, № 3, 293—298 (англ.)

Рассматриваемая автором задача обобщает задачу теории расписаний для случая двух машин, изученную С. Джонсоном (РЖМат, 1959, 718). n деталей подлежат последовательной обработке на двух машинах. Время обработки i-й детали на машине I равно A_i; на машине II — B_i; кроме того, обработка i-й детали на машине II может начаться лишь спустя D_i после ее обработки на машине I. Оптимальное расписание ищется в классе расписаний, в которых детали проходят обработку на обеих машинах в одной и той же последовательности (в упомянутой статье Джонсона это свойство вытекало из оптимальности расписания в задаче без запаздываний). Алгоритм заключается в следующем. Рассматриваются те i, для которых $A_i < B_i$; среди них находится i_1 с минимальным D_i и эта деталь запускается в обработку первой; среди оставшихся i ищется i_2 с минимальным D_i и деталь i_2 запускается в обработку второй и т. д. Затем рассматриваются те i, для которых $A_i \geqslant B_i$; среди них находится i_n с максимальным D_i и эта деталь запускается в обработку последней; среди оставшихся i находится i_{n-1} с максимальным D_i, и деталь i_{n-1} запускается в обработку предпоследней и т. д. Дано доказательство оптимальности этого правила в указанном классе, приведен пример. Указано на трудность более общей задачи, в которой детали проходят обработку на каждой машине в разных порядках. А. А. Корбут

6 В97. Определение последовательности выполнения n работ на двух машинах с произвольными запаздываниями во времени. Обсуждение. Johnson S. M. Discussion: sequencing n jobs on two machines with arbitrary time lags. «Manag. Sci.», 1959, **5**, № 3, 299—303 (англ.)

Дано простое доказательство результата Миттена (реф. 6В96). Предложен также подход к более общей задаче, указанной Миттеном. Этот подход позволяет производить выбор оптимального расписания в более

общем случае из сравнительно небольшого списка расписаний. А. А. Корбут

6 В98. Методы определения последовательности выполнения работ на группах машин. Обзор. Sisson Roger L. Methods of sequencing in job shops (A review). «Operat. Res.», 1959, **7**, № 1, 10—29 (англ.)

Обзорная статья. Перечисляются различные подходы к задачам теории расписаний, указываются некоторые критерии, лежащие в основе решения. Отмечая большую трудность решения общей задачи, автор подчеркивает перспективность вероятностного подхода, а также моделирования задач теории расписаний на электронных вычислительных машинах. Библ. 29 назв.

А. А. Корбут

6 В99. Задача об определении последовательности выполнения работ. Bowman Edward H. The schedule-sequencing problem. «Operat. Res.», 1959, **7**, № 5, 621—624 (англ.)

Путем введения некоторых неотрицательных переменных, принимающих лишь значения 0 или 1, автор сводит общую задачу теории расписаний (см., например, РЖМат, 1957, 6551) к задаче линейного программирования. Препятствием для ее численного решения является огромное число переменных и ограничений, появляющихся при таком сведении даже в задачах небольшого объема. Целочисленность решения требует привлечения метода Гомори (РЖМат, 1959, 7256), который связан с дополнительным разрастанием числа переменных и ограничений. Сходный подход к этой же задаче предложен Уагнером (РЖМат, 1961, 4В98). А. А. Корбут

6 В100. Модель составления графиков работы. Dantzig George B. A machine-job scheduling model. «Manag. Sci.», 1960, **6**, № 2, 191—196 (англ.)

Общая задача теории расписаний, в которой каждая из n работ требует использования некоторого подмножества из данных m машин в фиксированной для каждой работы последовательности, сводится к задаче линейного программирования. Следуя идеям Форда и Фулкерсона (РЖМат, 1959, 9334), автор строит для каждой работы транспортную сеть, звенья которой соответствуют различным способам выполнения этой работы. Использование сетевой записи заметно уменьшает число переменных и ограничений. Численное решение задачи требует разыскания кратчайшего пути через сеть. Требование целочисленности решения, разумеется, остается в силе. А. А. Корбут

6 В101. О задаче составления графиков обработки деталей на машинах. Manne Alan S. On the job-shop scheduling problem. «Operat. Res.», 1960, **8**, № 2, 219—223 (англ.)

Применяя ставший уже обычным прием (введение неотрицательных целочисленных переменных), автор сводит основную задачу теории расписаний к задаче целочисленного линейного программирования. В случае m станков и n деталей предлагаемый подход требует введения $p=mn(1+(n-1)/2)$ целочисленных переменных, что существенно меньше числа переменных в формулировках Уагнера (РЖМат, 1961, 4В98) и Боумана (реф. 6В99). А. А. Корбут

6 В102. Перераспределение общего запаса по нескольким местам назначений. Allen Stephen G. Redistribution of total stock over several user locations. «Naval Res. Logist. Quart.», 1958, **5**, № 4, 337—345 (англ.)

Задача о перераспределении запасов с целью минимизации суммы потерь от недостатка запасов и транспортных издержек сводится к минимизации выражения

$$p\sum\int_{s_k}^{\infty}(y-s_k)\,dP_k(y)+\sum\sum c_{kl}x_{kl}$$

при условиях $x_{kl}\geqslant 0$, $x_{km}x_{lk}=0$ $(k,l,m=1,\ldots,K)$. Здесь $P_k(y)$ — функция распределения потребностей в пункте k, p — потери от недостатка одной единицы запасов, c_{kl} — транспортные издержки. Дается характеристика решений этой задачи, предлагается вычислительный метод для случая выпуклых функций. Рассмотрены два простых частных случая задачи. А. А. Корбут

6 В103. Упрощенные производственно-складские контрольные карты. Mine Hisashi. Simplified production-inventory control chart. «J. Operat. Res. Soc. Japan», 1958, **1**, № 3, 120—126 (англ.)

Изучается задача, в которой фирма производит несколько типов товаров различных размеров через равные промежутки времени, причем производство полностью и немедленно удовлетворяет спрос. Требование имеет известное вероятностное распределение. Если спрос не может быть удовлетворен, разницу на следующий период переносить нельзя из-за запаздывания доставки. Рассматривается процесс с запаздыванием (под запаздыванием (лаг) понимается время между заказом и поступлением в запас). Предполагается, что запаздывание равно производственному периоду. Для решения задачи берется вероятность $P(s,y)$ нехватки в конце планируемого периода, где S — отправной запас в начале планируемого периода, y — величина планируемой продукции. Для малого ε решаются неравенства $P(s,y)\leqslant\varepsilon$ для каждого конкретного y. (Берутся только натуральные значения y). Получается набор $s_0, s_1, \ldots$ Если $s_{i+1}<s_k<s_i$, то производится $(i+1)$ единица продукции. Решение иллюстрируется графиком.

Э. О. Рапопорт

6 В104. Оптимальное размещение запасов и управление ими при производстве и распределении. Hanssmann Fred. Optimal inventory location and distribution networks, «Operat. Res.», 1959, **7**, № 4, 483—498 (англ.)

Ищется аналитическое приближение оптимальных уровней запаса во всех возможных размещениях запасов. Рассматривается следующая модель: запасы на пополнение запасов размещаются в начале периода (скажем, недели). Производственный период — m недель. В начале каждой недели имеется $q_1,\ldots,q_m$ продукции, находящейся в процессе производства на разных стадиях, причем q_i — величина продукции, которая будет готова через i недель. Задача состоит в определении q_m и изучении его действия на флюктуации запаса. Решается она максимизацией средней прибыли в предположении, что спрос распределен нормально. Рассматривается случай управления запасами на нескольких стадиях процесса для одного продукта и для нескольких продуктов.

Э. О. Рапопорт

6 В105. Динамика двух типов управления запасами с постоянным обновлением. Galliher H. P., Morse Philip M., Simond M. Dynamics of two classes of continuous review inventory systems, «Operat. Res.», 1959, **7**, № 3, 362—384 (англ.)

Поступление требований на склад случайно. Возобновление запаса на складе происходит путем заказа партии размера Q сразу после падения запаса ниже уровня R. В издержки включаются: стоимости заказа партии и хранения, убыток при невозможности выполнить требование. Задача состоит в определении R и Q, оптимальных в том или ином смысле. Рассматриваются два варианта: 1) поступление требований стационарно и независимо для непересекающихся интервалов времени, но в остальном произвольно; выполнение заказа требует промежутка времени фиксированной длины; 2) поступление требований пуассоновское, время выполнения заказа экспоненциально. Изложение обстоятельное, сопровождается графиками и таблицами. С. С. Кислицын

6 В106. Стоимостные уровни и детерминистские эквиваленты (введение в стохастическое программирование топливной нефти). Charnes A., Cooper W. W., Symonds G. H. Cost horizons and certainty equivalents: an approach to stochastic programming of heating oil. «Manag. Sci.», 1958, **4**, № 3, 235—263 (англ.)

Рассматривается вариант модели управления запасами топливной нефти на протяжении N последовательных периодов времени. Пусть R_j и S_j — соответственно величины пополнения запаса и спроса в j-й период. Из-

вестны плотности распределения спроса $f_j(S_j)$. Суммарные расходы по поддержанию и хранению запаса в j-й период равны $C_j(R_j)R_j + K_j\bar{I}_j$, где $C_j(R_j)$ есть известная стоимость R_j единиц продукта, K_j — стоимость хранения единицы продукта, а $\bar{I}_j = (I_{j-1} + I_j)/2$ есть средний уровень запаса в j-й период. Желательно минимизировать средний расход за N периодов при условиях, что

$$P\left(I_0 + \sum_{l=1}^{j} R_l \geqslant \sum_{l=1}^{j} S_l + I_{\min}\right) \geqslant \alpha_j,$$

$$P\left(I_0 + \sum_{l=1}^{j} R_l \leqslant \sum_{l=1}^{j} S_l + I_{\max}\right) \geqslant \alpha_j (= 1),$$

$$P(R_j \geqslant 0) = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Оптимальная политика управления запасами ищется в классе:

$$R_1 = \gamma_1 \geqslant 0; \quad \sum_{l=1}^{j} R_l = \sum_{l=1}^{j-1} \beta_{jl} S_l + \sum_{l=1}^{j} \gamma_l,$$

коэффициенты γ_l, β_{jl} носят наименование детерминистских эквивалентов (the certainty equivalents). При решении задачи используются известные методы выпуклого нелинейного программирования. С. С. Кислицын

6 В107. Контроль с помощью исследования операций над начислением очков в психологических тестах. Индо. «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1956, **1**, № 3, 122—127 (японск.)

6 В108. Размышления о больничной администрации и теория очередей. Хисинума. «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1956, **1**, № 3, 140—141 (японск.)

6 В109. Модель замены оборудования. I, II, III. Мураками. «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1957, **2**, № 4, 196—199; № 5, 246—251; № 6, 296—302 (японск.)

6 В110. Обзорный подход к количественному мышлению. Сато. «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1956, **1**, № 3, 128—132, 136 (японск.)

6 В111. Некоторые эпизоды типа исследования операций в торговой деятельности. Сигэока. «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1956, **1**, № 2, 84—88 (японск.)

6 В112. Исследование операций в оценке работы. Ясуи. «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1958, **3**, № 1, 2—7 (японск.)

6 В113. Использование отчетных данных для планирования и контроля. I, II, III. Окумура. «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1956, **1**, № 4, 170—173; № 6, 289—292, 1957, **2**, № 2, 63—68 (японск.)

6 В114. Оптимальный объем заказа. Харано. «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1957, **2**, № 2, 91—94, 74 (японск.)

6 В115. Управление запасами запасных частей для железнодорожных средств перевозок. Оку, Йокояма «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1957, **2**, № 5, 236—240 (японск.)

6 В116. Управление запасами материалов, нужных для обслуживания. Ямадзаки. «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1958, **3**, № 1, 18—21, 24 (японск.)

6 В117. Вероятностная модель трансформаторной станции. Маэда. «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1957, **2**, № 1, 33—37 (японск.)

6 В118. Модель стимулирования. Накахара. «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1956, **1**, № 2, 102—103 (японск.)

6 В119. Примеры применения исследования операций к планированию перевозочных средств в японской Национальной компании железных дорог. Йокояма, Каинума. «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1956, **1**, № 6, 301—307 (японск.)

6 В120. Поломка и замена частей. Ямаки. «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1957, **2**, № 3, 119—123 (японск.)

6 В121. Предсказание погоды и исследование операций. Судзуки. «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1958, **3**, № 2, 64—70 (японск.)

6 В122. Проблема предсказания ошибок в межотраслевом анализе. Кано, Нагао. «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1958, **3**, № 3, 123—126 (японск.)

6 В123. Обучение на деловых играх. Осава. «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1958, **3**, № 3, 112—118 (японск.)

6 В124. Мастерство и аналитический метод. Карацу. «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1958, **3**, № 3, 119—122 (японск.)

6 В125. Математический анализ в промышленности. Хорафас Д. «Биомеханики эпитеорисис», 1960, **27**, № 303, 35—37 (греч.)

6 В126 К. Элементарное математическое программирование. Metzger R. W. Elementary mathematical programming, New York, Wiley, 1958, 246 pp. (англ.)

Книга не содержит оригинальных сведений и рассчитана на читателей, не знакомых с математикой и не заинтересованных в ознакомлении с математическими подробностями, но зато серьезно интересующихся применением методов оптимизации в промышленной, хозяйственной и административной деятельности. Математическое обоснование методов линейного программирования в книге полностью опущено, зато весьма подробно и обстоятельно, на большом числе примеров, описываются и демонстрируются различные алгоритмы линейного программирования. Даются также краткие сводки правил для практического решения задач. Много внимания уделено вопросам постановки задач и перехода от словесных формулировок к математической записи задачи — одной из самых трудных фаз работы при использовании математических методов на практике. Все выкладки и вычисления проводятся подробно, шаг за шагом, с детальными пояснениями. В книге показаны методы решения числовых примеров (начиная с постановки проблемы) для следующих типов задач: 1) распределение работ по станкам или рабочим; 2) транспортная задача (распределение поставок от большого числа поставщиков большому числу потребителей, в том числе и при наличии перевалочных пунктов); 3) выбор исходных материалов для составления смесей заданного состава; 4) наивыгоднейший раскрой материала; 5) планирование производства (сверхурочные работы и хранение запасов для обеспечения заданного спроса по времени). Кратко обсуждаются условия экономичности применения быстродействующих машин для решения задач. Мало места в книге отведено трудностям, встречающимся при постановке сложных задач, которые не могут быть легко приведены к стандартным, типичным задачам. Обсуждаются главным образом типичные задачи, которые, впрочем, достаточно общи и охватывают весьма широкий класс практически встречающихся случаев. Автор полностью игнорирует проведенные в СССР работы по методам линейного программирования, выполненные значительно раньше первых американских работ в этой области.

6 В127 К. Теория линейных экономических моделей. Gale David. The theory of linear economic models. New York — Toronto — London, McGraw — Hill Book Co. Inc., 1960, xxii, 330 pp., ill. (англ.)

Реферируемая книга возникла на основе лекционных курсов, читавшихся автором с 1956 г. Она посвящена не только линейным экономическим моделям в узком смысле, но и линейному программированию и теории антагонистических игр. Такой отбор материала дает достаточно полное представление о современных направлениях исследований в области математической экономики.

Вводная, гл. I посвящена изложению основных понятий линейного программирования. Она открывается постановкой некоторых типичных задач (задача о диете, транспортная задача и др.). Здесь даются определения основных понятий линейного программирования, вво-

дится понятие пары двойственных задач, доказывается теорема двойственности, дается экономическая интерпретация двойственных задач и приводятся примеры. Глава завершается доказательством простой теоремы о равновесии. Все дальнейшее изложение основывается на общей идее равновесия.

В гл. 2 изложен весь необходимый по ходу изложения аппарат линейной алгебры. Основное внимание уделяется совместному исследованию систем линейных уравнений и неравенств, их геометрии, теории выпуклых конусов и многогранников. В изложении имеется ряд терминологических и методических новшеств.

В гл. 3 систематически изучается теория линейного программирования: основные двойственные задачи, теоремы двойственности и существования, системы ограничений в форме равенств и неравенств, базисные решения. В качестве иллюстрации подробно рассмотрена модель распределения ресурсов в экономике с конкуренцией.

Гл. 4 посвящена симплекс-методу. Во вводном параграфе дано единообразное описание процесса решения линейной системы и обращения матрицы, облегчающее переход к изложению алгорифма симплекс-метода. Затем подробно описан и проиллюстрирован симплекс-метод, а также указаны его приложения к решению систем линейных неравенств и к нахождению неотрицательных решений систем линейных уравнений. В заключение описан обобщенный симплекс-метод, позволяющий решать вырожденные задачи.

В гл. 5, посвященной целочисленным задачам линейного программирования, не затронуты последние разработки в этой области (метод Гомори, см. РЖМат, 1959, 7256); здесь рассматриваются в основном целочисленные задачи типа транспортной, для которых создана самостоятельная, в значительной мере замкнутая теория. К этому же кругу вопросов примыкает теория потоков в транспортных сетях, изложенная весьма изящно.

Гл. 6 является введением в теорию антагонистических игр. Основные понятия теории игр (игра, выигрыш, стратегия, значение игры) вводятся в общем виде и затем иллюстрируются примерами. Здесь же изучены симметричные игры и дано два простых доказательства основной теоремы для матричных игр — алгебраическое и геометрическое.

В гл. 7 более детально изучаются матричные игры. Прежде всего показана эквивалентность матричных игр и задач линейного программирования и проиллюстрировано решение игры симплекс-методом. Затем изучаются и иллюстрируются свойства оптимальных стратегий. Автор приводит характеристику базисных (крайних) оптимальных стратегий, описывает метод синтезирования игры (т. е. построения игры с заданными множествами стратегий). В заключение описан итеративный метод Брауна — Робинсон и доказана его сходимость.

Гл. 8 и 9 посвящены непосредственно линейным экономическим моделям. В гл. 8 рассматриваются вопросы равновесия для линейных моделей обмена (статических и динамических). В гл. 9 изучаются статические и динамические модели производства. Рассмотрены, в частности, теоретические свойства модели Леонтьева, модель расширяющейся экономики фон Неймана и разработанная автором замкнутая линейная модель производства.

Каждая глава снабжена историко-библиографическими комментариями и интересными задачами различного уровня трудности (всего 217). В целом книга задумана как учебное пособие, пригодное как для начального, так и для более углубленного изучения предмета. Широкий охват материала, четкое и математически единообразное рассмотрение, исключительно продуманное изложение, сочетающее доступность с математическим изяществом, делают эту книгу ценным пособием по прикладной математике.

А. А. Корбут

6 В128 К. Труд, трудящиеся и измерение труда. Abruzzi Adam. Work, workers and work measurement, «New York, Columbia Univ. Press», 1956, xvi, 318 pp., 7.50 doll. (англ.)

Эта книга является попыткой расширить основания теории и практики измерения результатов труда; она придает особое значение социальным и другим факторам и определяет границы применения чисто статистических методов. Проводится четкое различие между приближенной и точной функциями оценки. После краткого обсуждения плана своего исследования автор отмечает трудности стандартизации и настаивает на том, что измерение необходимого для выполнения производственных операций времени должно проводиться отдельно от определения норм выработки и тарифных ставок. Перечисляются недостатки обычно применяемых методов исчисления производительности; особо отмечается весьма распространенное смешение понятий точности и тщательности. Выдвигается предложение рассматривать исчисление производительности методами теории игр. Проводится детальный анализ инструментов для измерения времени и их действия. С целью достижения стандартизации даются критерии локальной и глобальной устойчивости; эти критерии применяются к большому числу практических ситуаций. Анализируются отсрочки. Описываются недостатки стандартных систем данных, стандартных элементов и стандартных движений и связанные с ними проблемы. В заключительных главах автор настаивает на том, что «попросту не существует «наилучшего образа действий» с учетом всех требований, которые должны быть приняты во внимание в любой реальной практической задаче». Он подтверждает этот тезис анализом целенаправленного поведения на разных уровнях. Автор обсуждает также различные формы утомления, два вида навыков и их отношение к процессу труда.

C. C. Torrance

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 8, 707.

6 В129 К. Математические методы исследования операций. Saaty Thomas L. Mathematical methods of operations research, New York — London, McGraw-Hill Book Co., 1959, xi, 421 pp., ill., 77 sh. 6 d. (англ.)

Книга является монографией, посвященной систематическому изложению математических методов исследования операций. Она представляет собой обработку конспектов лекций автора, рассчитанных на широкие круги слушателей. Гл. 1, вводная, посвящена истории, современному состоянию, перспективам развития и основным идеям исследования операций. Автор указывает, что строгое формальное определение понятия операции до сих пор не установлено, хотя в это понятие и вкладывается вполне четкий интуитивный смысл. Автор дает несколько вариантов определения предмета исследования операций, из которых наиболее удачным он считает такое слегка саркастическое определение: «исследование операций есть искусство давать плохие решения задач, для которых другие методы дают еще худшие решения». Гл. 2 знакомит читателя с основными этапами работы по исследованию операций. Первая стадия исследования начинается с определения характера операции и установления основных параметров задачи. Наиболее существенным моментом на этой стадии является формулировка критериев эффективности и постановка задачи применительно к желаемым целям. Стадия собственно исследования включает в себя сбор необходимых данных, формулировку гипотез и создание математических моделей, проверку гипотез на основе дополнительных данных, предсказание результатов, их обобщение. Наконец, на стадии осуществления из проведенного анализа задачи делаются конкретные выводы и количественные рекомендации, служащие основой для практических решений. Все эти этапы работы по исследованию операций подробно обсуждаются и разъясняются на примерах. Гл. 3 посвящена некоторым элементарным математическим идеям и приемам. На несложных примерах автор рассказывает о теоремах суще-

ствования и единственности, необходимых и достаточных условиях, некоторых приемах построения решений и доказательства сходимости, приближенных решениях и оценках погрешности. Во второй части этой главы излагаются элементы математической логики (логические соотношения, правила выводов, таблицы истинности). Основное содержание гл. 4 «Элементарные классические методы, используемые при построении моделей», составляет беглый обзор методов решения дифференциальных, линейных разностных и интегральных уравнений. Хорошо подобраны примеры из военной тактики, биологии и т. д. (рассмотрены уравнения Ланчестера, модель взаимоотношения паразита с его хозяином и др.). Несколько заключительных страниц отведено некоторым вероятностным и статистическим методам, в частности методу наименьших квадратов и — несколько неожиданно в этом контексте — теории информации. Гл. 5 открывает второй раздел книги, посвященный различным проблемам оптимизации. Она начинается с обзора методов решения алгебраических уравнений и систем, а также систем более общего вида: дается понятие о методе Ньютона и методе наискорейшего спуска. Затем рассматриваются простейшие свойства неравенств, приводятся некоторые полезные неравенства и вкратце излагается теория систем линейных неравенств, включая их решение методом исключения и релаксационным методом. Из известной теоремы Моцкина о транспонировании легко выводится теорема двойственности для задач линейного программирования. Далее описывается нахождение экстремумов функций при отсутствии ограничений и при ограничениях на переменные в виде равенств или неравенств. В качестве примеров выведено уравнение динамического программирования и разобрана непрерывная задача о «сглаживании» производства. Заключительные примеры этой главы оперируют уже с более тонкими математическими понятиями (энтропия, измеримые функции, интеграл Лебега). В гл. 6 довольно подробно излагаются теоретические и вычислительные вопросы линейного и квадратичного программирования. Сформулирована задача о диете и транспортная задача; большинство других применений линейного программирования автор только перечисляет или излагает описательно. Дано подробное изложение симплекс-метода применительно к двум названным выше задачам. Вкратце изложены результаты С. Гасса и автора о параметрическом линейном программировании. В разделе о квадратичном программировании на простом примере описан алгоритм М. Франк и Ф. Вульфа. Одним из важных методов исследования операций служит теория игр. Гл. 7 содержит краткое и весьма элементарное введение в этот раздел математики. Основное внимание уделено матричным играм и некоторым методам их решения, в частности изложен итеративный метод Дж. Брауна и Дж. Робинсон. Проиллюстрирована эквивалентность матричной игры и задачи линейного программирования, а также решение игр симплекс-методом. Кроме того, дается понятие о бесконечных играх и приводится ряд примеров: задача о дуэли, «игра Блотто» и др. Обсуждаются различные способы определения значения для так называемых игр против природы. Гл. 8—11 образуют третий раздел книги, посвященный теоретико-вероятностным и статистическим методам. В гл. 8 сжато изложены основные понятия теории вероятностей, а в гл. 9 некоторые ее приложения. Гл. 10 содержит элементы математической статистики. Гл. 11 представляет собой воспроизведение весьма насыщенной материалом обзорной статьи автора по теории очередей (РЖМат, 1958, 10170). Несколько обособлена в книге гл. 12, «Некоторые соображения о творческой способности». Она представляет собой изложение мыслей автора о процессе научного творчества вообще, о некоторых его общих методах и особенностях, а также о решениях задач коллективами. Автор подчеркивает, что исследование операций включает не только набор определенных технических приемов, оно основывается в первую очередь на творческой способности ученого, на его умении критически отобрать и строго развить те общенаучные и чисто математические идеи, которые лежат в основе проводимого исследования.

А. А. Корбут

6 В130 К. Исследование операций. Методы и проблемы. Sasieni Maurice, Yaspan Arthur, Friedman Lawrence. Operations research. Methods and problems, New York, John Wiley and Sons; London, Chapman and Hall, 1959, xi, 316 pp., ill., 82 sh. «Brit. Nat. Bibliogr.», 1959, № 503, 11 (англ.)

6 В131 К. Математические методы, применяемые в работе по транспортировке грузов. (Уцзы дяоюнь гунцзочжунды, шусюе фанфа). Пекин, Кэсюэ чубаньшэ, 1959, II, 70 стр., илл., 0,26 юаня (кит.)

6 В132 К. Элементы теории игр. Вентцель Е. С., М., Физматгиз, 1959, 67 стр., илл., 90 коп.

6 В133 К. Динамическое программирование. Беллман Р. Перев. с англ. М. Изд-во ин. лит., 1960, 400 стр., илл., 17 р. 60 к.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Редактор *Р. Л. Добрушин*

6 В134. Расчеты по методу Монте-Карло в статистической механике. Wood W. W., Jacobson J. D. Monte Carlo calculations in statistical mechanics. «Proc. West. Joint Comput. Conf., San Francisco, Calif.», 1959. New York, 1959, 261—269 (англ.)

Предлагается процедура Монте-Карло для расчета статистических характеристик (в первую очередь, давления газа), молекулярного ансамбля, потенциальная энергия U которого является суммой потенциалов парных взаимодействий. Процедура формулируется для случая потенциалов общего вида, но детализируется лишь для модели молекул в виде абсолютно упругих шариков диаметра σ. В этом случае давление определяется формулой

$$pV/(NkT) = 1 + (\sigma n'(\sigma)/\sigma),$$

где $n(r)$ — кумулятивная радиальная функция распределения, имеющая вид

$$n(r) = (1/N) < \sum_{\alpha \neq \beta} A(r_{\alpha\beta}, r) >,$$

где $A(x, r)$ равно единице при $0 \leqslant x < r$ и нулю при $x \geqslant r$; $r_{\alpha\beta}$ — расстояние между центрами молекул, имеющих номера α и β, а фигурные скобки означают осреднение по координатам всех молекул с весом

$$\exp(-U/(kT)).$$

Для модели упругих шариков нормированное давление pV/NkT зависит лишь от объемного параметра $\tau = N/V\sigma^3\sqrt{2}$. Для макроскопических систем $V \sim 1$ см^3 $N \sim 10^{22}$ и прямой расчет статистических средних практически неосуществим. Поэтому предлагается производить расчет для периодической по пространству схемы, в которой в элементарной пространственной (кубической) ячейке содержится $N = 32$ молекул, и их совместные состояния ($3N$-мерные векторы, $j, k, \ldots$) образуют во времени стационарную марковскую последовательность. Для модели упругих шариков вероятность перехода $p(j, k)$ принимается при $U(k) = \infty$ равной нулю, а при $U(k) = 0$ — отличной от нуля (и равной $1/8N\delta^3$) лишь в случае, если в состояниях j и k координаты всех молекул, кроме одной (имеющей номер β), равны, а координаты молекулы β отличаются не более чем на малую величину δ (в 2^{-17} раз меньшую, чем ребро куба V). Обсуждается вопрос об эргодических свойствах такой

марковской последовательности. Расчет по методу Монте-Карло сводится к следующим операциям: 1) случайный выбор координат молекулы β в состоянии $j(t)$; 2) случайный сдвиг этой молекулы с равномерным распределением по интервалу $(-\delta, \delta)$ для координат сдвига; после этого сдвига состояние $j(t)$ переходит в состояние $j'(t)$; 3) если в состоянии $j'(t)$ никакие две молекулы не перекрываются, то полагается $j(t+1) = j'(t)$; если имеются перекрытия, полагается $j(t+1) = j(t)$; 4) вычисление статистических характеристик ансамбля, как средних по времени для полученной последовательности состояний $j(t)$, $j(t+1)$, ... Приводится результат расчета зависимости pV/NkT от объемного параметра τ, показывающий, что при $\tau < 1{,}6$ зависимость оказывается двузначной, т. е. имеется фазовый переход первого рода. Возможным объяснением этого является то, что использованная марковская последовательность при значениях τ около 1,6 распадается на два эргодических класса. При $\tau > 1{,}6$ этой трудности не возникло и результат расчета можно считать заслуживающим доверия. В заключение обсуждается вопрос об оптимальном выборе параметров расчетной схемы. А. С. Монин

6 В135. Фокусировка излучения случайной поверхностью в случае, когда источник расположен на конечном расстоянии от нее. Longuet-Higgins M. S. The focusing of radiation by a random surface when the source is at a finite distance. «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1960, **56**, № 1, 27—40 (англ.)

Пусть $I(x, y)$ — случайная однородная поверхность Предполагается, что

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}\right)$$

имеют совместное гауссово распределение. Над поверхностью на некотором расстоянии от ее среднего уровня расположен источник света. Рассматривается задача о нахождении распределения величины фокусировки при отражении света от $I(x, y)$. Предполагается, что поверхность является почти «плоской», а падающий и отраженный лучи «близки к вертикали». Если провести на некоторой высоте воображаемую плоскость (x', y') параллельно среднему уровню поверхности $I(x, y)$, то из-за условия слабого искривления поверхности можно считать, что луч света однозначно связывает точки (x, y) на поверхности $I(x, y)$ с точками (x', y') на воображаемой плоскости. Величину фокусировки естественно тогда определить как модуль якобиана преобразования от координат (x, y) к координатам (x', y'). С математической точки зрения задача сводится к нахождению распределения величины $|F|^{-1}$, где

$$F = 1 + a\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}\right) + a^2\left[\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 I}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y}\right)^2\right]$$

и a — константа. Отдельно рассмотрены случаи, когда поверхность изотропная и анизотропная. Получены формулы для функций распределения величины $|F|^{-1}$, проиллюстрированные графиками. В. Ф. Писаренко

6 В136. О систематических ошибках в регрессионном анализе с приложением к атмосферным влияниям на космическую радиацию. Trefall Harald, Nordö Jack. On systematic errors in the least squares regression analysis, with application to the atmospheric effects on the cosmic radiation. «Tellus», 1959, **11**, № 4, 467—477 (англ.)

Рассматривается линейная средняя квадратическая регрессия одной «зависимой» величины относительно нескольких «независимых» величин и показывается, что если при измерении одной или нескольких из этих величин вносятся случайные ошибки, то при этом не только увеличивается дисперсия эмпирически найденных коэффициентов корреляции и регрессии, но также меняются их средние значения. Если ошибки в измерениях различных величин не коррелированы между собой, то 1) ошибки в измерении «зависимых» переменных уменьшают численные значения всех частных коэффициентов корреляции ; 2) ошибки в «независимых» переменных также стремятся уменьшить значения соответствующих им частных коэффициентов корреляции, тогда как средние значения других частных коэффициентов корреляции могут измениться в любом направлении; среднее значение сводного коэффициента корреляции уменьшается; 3) ошибки в измерениях «зависимых» величин не изменяют средние значения коэффициентов регрессии; 4) ошибки в измерении «независимой» величины уменьшают значение соответствующего ей частного коэффициента регрессии; 5) ошибки в нескольких величинах могут изменить данный коэффициент регрессии в любом направлении. Эти правила не сохраняются для случая, когда ошибки в измерениях разных величин коррелированы между собой. В частности, тогда влияние случайных ошибок может увеличивать сводный коэффициент корреляции. Из этих рассмотрений делается вывод о необходимости учета влияния случайных ошибок в исходных данных при выводе различных эмпирических законов, а также при сравнении теоретических и эмпирических оценок. В качестве примера проводится анализ данных, характеризующих зависимость интенсивности космической радиации на уровне моря от атмосферных условий (барометрического давления на уровне моря, температуры и др.). Статистические характеристики случайных ошибок в аэрологических данных получены из сравнения данных работы двух станций, расположенных недалеко друг от друга и работавших примерно в один и тот же период времени. Оценки для коэффициентов регрессии, полученные без учета случайных ошибок, при сравнении с теоретическими давали значительное расхождение, которое до сих пор не было объяснено; оценки, исправленные с учетом случайных ошибок, лучше согласуются с теоретическими. Э. М. Хазен

6 В137. Структурные соотношения между временной функцией и ее автокорреляцией. Szulkin P. Zależności strukturalne między funkcją czasową a jej krzywą autokorelacyjną. «Prace Przemysł. inst. telekomun.», 1959, **9**, № 28, 5—9 (польск.; рез. русск., англ., франц.)

Эвристическое рассмотрение соотношений между свойствами случайной функции и ее корреляционной функцией, в особенности поведения этих функций в окрестности нуля. R. Bartoszyński

6 В138. Отношения сигнал/шум в сглаженных ограничителях. Galejs Janis. Signal-to-noise ratios in smooth limiters. «IRE Trans. Inform. Theory», 1959, **5**, № 2, 79—85 (англ.)

Рассматривается случайный процесс $u(t) = n(t) + a\cdot\sin(\omega_0 t + \theta)$, где $n(t)$ — стационарный гауссовский процесс с нулевым средним значением и дисперсией σ^2, a — константа, θ — случайная величина с равномерным на $[0, 2\pi]$ распределением ($n(t)$ — шум, $a\sin(\omega_0 t + \theta)$ — сигнал). Процесс $u(t)$ подвергается «сглаженному ограничению», т. е. образуется процесс $v(t) = f_b[u(t)]$, где

$$f_b(z) = 2\sqrt{\pi}\int_0^{\frac{z}{2\sqrt{b}}} e^{-x^2}\,dx.$$

В пределе при $b \to 0$ получается несглаженное ограничение с помощью функции $f_0(z) = \pi\,\mathrm{sign}\,z$, которое называют в радиотехнике клиппированием. Далее процесс $v(t)$ пропускается через линейный фильтр и рассматривается полученный на выходе фильтра стационарный процесс $W(t)$. Для процесса $W(t)$ определяется параметр S/N, называемый отношением сигнал/шум. Параметр S/N определяется следующим образом. Если обозначить дисперсию $W(t)$ при $\sigma = 0$ через d_0, а при $\sigma > 0$ через d, то $S/N = d_0/d - d_0$ (для процесса $u(t)$ параметр S/N равен $a^2/2\sigma^2$). Для некоторых конкретных

функций корреляции шума $n(t)$ и для определенного фильтра параметр S/N вычисляется приближенно при малом a/σ. Показано, что для рассматриваемых случаев S/N меньше чем $a^2/2\sigma^2$ на 6—16%. В. Ф. Писаренко

6 В139. Заметка об угловой модуляции суммой периодической функции и шума. Karr P. R. A note on angle modulation by a mixture of a periodic function and noise. «IRE Trans. Inform. Theory», 1959, **5**, № 3, 140—143 (англ.)

Дается представление сигнала

$$Y(t) = \cos[\omega t + P(t) + N(t)]$$

в виде ряда

$$Y(t) \approx \sum\nolimits_n d_n \cos[\omega t + 2\pi nat + \beta n + N(t)]$$

и выводится точная формула для корреляционной функции $R_y(\tau)$:

$$R_y(\tau) = \overline{<Y(t)\,Y(t-\tau)>} = c_N(\tau)\,c_Y(\tau) - S_N(\tau)S_Y(\tau).$$

Здесь:

$$c_N(\tau) = <\cos[N(t) - N(t-\tau)]>,$$

$$S_N(\tau) = <\sin[N(t) - N(t-\tau)]>,$$

$$c_Y(\tau) = \frac{1}{2} <\cos[\varphi(t) - \varphi(t-\tau)]>,$$

$$S_Y(\tau) = \frac{1}{2} <\sin[\varphi(t) - \varphi(t-\tau)]>,$$

$P(t)$ — периодическая функция с периодом $1/a$, $N(t)$ — стационарный случайный процесс, a_n и β_n — коэффициенты разложения функции $y(t) = \cos[\omega t + p(t)]$ в ряд Фурье. Черта обозначает временное среднее и косые скобки — среднее по ансамблю. Е. М. Сухарев

6 В140. Метод измерения функций распределения вероятностей, использующий их разложение по ортогональным полиномам. Кириллов Н. Е. В сб.: «Пробл. передачи информ.». Вып. 4. М., АН СССР, 1959, 152—157

Приводится блок-схема устройства для исследования стационарных эргодических случайных процессов, характеризуемых n-мерными функциями распределения

$$p_n(x_1, \ldots, x_n, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots$$

Предполагается, что

$$p_n = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \sum a_{m\ldots p}(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})\,\theta_m(x_1)\ldots\theta_p(x_n),$$

где $\theta_k(x)$ — ортогональные полиномы относительно веса $f(x)\,dx$. Коэффициенты $a_{m\ldots p}$ определяются при помощи n-кратных интегралов. Автор предлагает на основании эргодичности найти приближенные значения этих коэффициентов как средние по времени от $\theta_m(x_1)\ldots\theta_p(x_n)$ по одной выборочной функции процесса. Указывается схема для технической реализации такого метода измерения. Г. К. Энгелис

6 В141. Некоторые основные вопросы теории информации. Rényi Alfréd. Az információelmélet néhány alapveto kérdése. «Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl.», 1960, **10**, № 3, 251—282 (венг.)

Обзор. Рассматриваются энтропия, информация и их использование в статистике. И. Ф. Красичков

6 В142. Направление изменения информационных функционалов с весом и без веса при утончении разбиений. Leipnik R. Direction of change with refinement for unweighted and weighted information-entropy functionals. «IRE Trans. Inform. Theory», 1959, **5**, № 4, 184—186 (англ.)

Рассмотрим меру μ_0, заданную на счетно-аддитивном классе подмножеств F из некоторого пространства Ω. Пусть π — счетное разбиение множества $B \in F$ на непересекающиеся подмножества. Определим информационный функционал без веса (апостериорный)

$$L_{\mu_0}(\pi) = \frac{k}{\mu_0(B)} \sum\nolimits_{A \in \pi} \mu_0(A) \log \mu_0(A),$$

где k — некоторая константа. Рассмотрим μ-неотрицательную полуаддитивную функцию множества (т. е. $\mu(A) \geqslant 0$ для каждого $A \in F$ и $\mu(A_1 \cup A_2) \geqslant \mu(A_1) + \mu(A_2)$ для $A_1 \cap A_2 = 0$, $A_1, A_2 \in F$). Определим информационный функционал с весом (или априорный)

$$L_{\mu_0\mu}(\pi) = \frac{k}{\mu_0(B)} \sum\nolimits_{A \in \pi} \mu_0(A) \log \frac{\mu_0(A)}{\mu(A)}.$$

Говорят, что разбиение π' является утончением разбиения π, если каждое $B \in \pi$ является счетным объединением множеств $B' \in \pi'$. Для введенных функционалов доказаны теоремы:

Теорема 1. Пусть π' — утончение π. Если $k < 0$, то $L_{\mu_0}(\pi') \geqslant L_{\mu_0}(\pi)$; если $k > 0$, то $L_{\mu_0}(\pi') \leqslant L_{\mu_0}(\pi)$.

Теорема 2. Если $k < 0$, то $L_{\mu_0\mu}(\pi') \leqslant L_{\mu_0\mu}(\pi)$; если $k > 0$, то $L_{\mu_0\mu}(\pi') \geqslant L_{\mu_0\mu}(\pi)$.

Автор указывает, что полученные результаты могут быть обобщены на условные функционалы.

К. А. Горькова

6 В143. Постулат Байеса и энтропия. Rajski C. Postulat Bayesa a entropia. «Zastosow. mat.», 1958, **4**, № 1, 91—94 (польск.; рез. русск., англ.)

При разных дополнительных предположениях находится плотность распределения $p(x)$, для которой дифференциальная энтропия $\int p(x) \log p(x)\,dx$ максимальна. Результаты не новы. Р. Л. Добрушин

6 В144. К фильтрации случайных последовательностей. Брудно А. Л., Лунц А. Л. «Докл. АН СССР», 1960, **131**, № 3, 485—488

Пусть $v_0, v_1, v_2, \ldots$ — известная реализация случайной последовательности $v_i = u_i + \xi_i$, где $\{u_i\}$ — последовательность с независимыми приращениями ζ_i, а ξ_i — случайные ошибки, причем ζ_i и ξ_i независимы, имеют нулевые математические ожидания и дисперсии D_1^2 и D_2^2. Ставится задача о нахождении такой линейной функции $f(\{v_i\})$, математическое ожидание которой при любом фиксированном (но не известном) значении u_0 равно u_0, а дисперсия является минимальной. Формулируется теорема, согласно которой решение этой задачи имеет вид:

$$f = (1 - \lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i v_i;\ \lambda = \delta - \sqrt{\delta^2 - 1};\ \delta = 1 + D_1^2/2D_2^2.$$

Утверждается, что если $M\zeta_i = c$ заранее неизвестно, то функции f, обладающей указанными свойствами, не существует. Рассматривается также более сложный случай, в котором $u_i = h_i - k_i$, где $\{h_i\}$ — последовательность с независимыми приращениями ζ_i, а $\{k_i\}$ — последовательность с независимыми вторыми разностями η_i, причем η_i, ζ_i и ξ_i независимы, имеют нулевые математические ожидания и дисперсии D_1^2, D_2^2 и D_3^2. Здесь ищется такая линейная функция $f(\{v_i\})$, математическое ожидание которой при любых фиксированных (но не известных) значениях u_0 и u_1 равно u_0, а дисперсия минимальна. Указывается решение этой задачи.

А. С. Монин

6 В145. Приближение к распределениям полного времени ожидания. De Baun R. M., Katz S. An approximation to distributions of summed waiting times. «Operat. Res.», 1959, **7**, № 6, 811—813 (англ.)

Изучается закон распределения полного времени ожидания $x_1 + \ldots + x_n$ в предположении, что время ожидания x_j подчиняется закону $P\{x_j > \tau\} = K_j \exp(C_j\tau)$

$(\tau \geqslant 0)$, $P\{x_j = 0\} = 1 - K_j$ и что величины x_j независимы.

В статье дается легко вычисляемое приближение для распределения $P\{x_1 + \ldots + x_n > \tau\}$, точное при не слишком малых τ. Аппроксимация состоит в том, что искомое распределение приближается распределением $b\chi^2_n$, где множитель b и число n степеней свободы подбираются так, чтобы среднее и дисперсия совпадали с соответствующими параметрами искомого распределения.

К. П. Латышев

6 В146. Процессы очереди, связанные с регистрацией пассажира на авиалинии. Lee A. M., Longton P. A. Queueing procésses associated with airline passenger check-in, «Operat. Res. Quart.», 1959, **10**, № 1, 56—71 (англ.)

Перед полетом пассажир должен пройти регистрацию. Если число регистрационных пунктов не достаточно велико, пассажиры должны ждать обслуживания (время ожидания случайно). Степень обслуживания характеризуется временем ожидания обслуживания и временем обслуживания. Задача состоит в том, чтобы, обеспечивая некоторый наперед заданный уровень обслуживания, определить оптимальный тип системы регистрации пассажиров. Система считается оптимальной, если она при данном уровне обслуживания обеспечивает наименьшую стоимость обслуживания. Обсуждается определение оптимальной системы регистрации на основе как теоретических, так и эмпирических методов.

В. Н. Комлева

6 В147. Последовательный процесс контрольных испытаний. 2. Kitagawa Tosio. Successive processes of statistical controls. 2. «Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.», 1959, **A13**, № 1, 1—16 (англ.)

Настоящая статья представляет собой продолжение ранней работы автора (Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1952, A7,13—28). В части II изучаются вероятностные свойства последовательного процесса контрольных испытаний, состоящего в следующем: Имеется последовательность известных констант $\{\xi_i\}$ (например, последовательные положения движущейся мишени) и последовательность неизвестных констант $\{\eta_i\}$ (например, последовательность значений некоторого параметра, определяющего закон распределения точки попадания). В моменты времени 1, 2, 3... производятся контрольные испытания, на основании которых вычисляются значения некоторой статистики U: $u_1, u_2, u_3, \ldots$, используемые затем для корректировки $\{\eta_i\}$ таким образом, чтобы последовательность $\{\eta_i^c\}$ скорректированных значений неизвестных параметров сходилась к последовательности $\{\xi_i\}$. Точнее

$$\eta_j^{c_1} = \eta_j + c_{11}(\xi_1 - u_1),$$

$$\eta_j^{c_1 c_2} = \eta_j^{c_1} + c_{22}(\xi_2 - u_2) + c_{21}(\xi_1 - u_1),$$

. . . . . .

$$\eta_j^{c_1 \cdot c_m} = \eta_j^{c_1 \cdot c_{m-1}} + \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(\xi_k - u_k),$$

где все $c_{\alpha\beta}$ — константы, а совместное распределение $\mathbf{u}_k = (u_k, u_{k-1}, \ldots, u_1)$ величины U в $(k+1)$-ых испытаниях определяется плотностью $g_{k+1}(x, \mathbf{u}_k)$. Положим

$$\varphi_{k+1}(t, \overline{u_k}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g_{k+1}(x, \mathbf{u}_k)\, dx,$$

$$\varphi_{k+1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g_{k+1}(x, \mathbf{u}_k)\, dx du_k \ldots du_1,$$

тогда основной результат формулируется следующим образом:

Теорема 3. I. Пусть имеется последовательность констант, определенных рекуррентно,

$$e^{(0)}_{m,j} = \sum_{k=j}^{m} c_{k,j},$$

$$e^{(k)}_{m-k,j} = e^{(k-1)}_{m-k+1,j} - e^{(k-1)}_{m-k+1,\,m-k+1}\, e^{(0)}_{m-k,j}$$

для $1 \leqslant j \leqslant m-k$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$. Тогда

$$\varphi_{m+1}(t) = \exp\left\{it \sum_{k=0}^{m-1} e^{(k)}_{m-k,\,m-k}(\xi_{m-k} - \eta_{m-k})\right\} \times$$

$$\times\, \varphi_1(t) \prod_{k=0}^{m-1} \varphi_1\left(-e^{(k)}_{m-k,m-k}\, t\right).$$

Первый сомножитель показывает влияние на сходимость различия между $\{\xi_i\}$ и неизвестной $\{\eta_i\}$, а второй сомножитель показывает наличие флюктуаций. В IV части устанавливается существование тесной связи между последовательными процессами статистического контроля и стохастическими аппроксимациями типа Робинса — Монро и доказываются две теоремы о сходимости стохастических итераций, соответствующих процессам контрольных испытаний. Эти теоремы являются по существу модификацией известных теорем Дворецкого о сходимости. В V части рассмотрен непрерывный аналог последовательного процесса контрольных испытаний.

В. М. Волков

6 В148. Последовательный процесс контрольных испытаний. 3. Kitagawa Tosio. Successive process of statistical controls. 3. «Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.», 1960, **A14**, № 1, 1—33 (англ.)

Показывается, что некоторые задачи статического контроля по методу контрольных карт приводят к последовательному процессу контрольных испытаний (реф. 6В147) весьма специального вида: исходное дискретное распределение, определенное вектором $\mathbf{P}_0 = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, последовательно преобразуется в новые распределения с помощью умножения справа на степени стохастической матрицы P, так что распределение в момент n определяется вектором $P_n = P_0 P^n$, и задача его отыскания есть задача отыскания безусловного распределения состояний в простой цепи Маркова. Опираясь на известную формулу Перрона, выражающую элементы матрицы P^n через характеристические числа матрицы P, автор подробно рассматривает матрицы 3-го и 5-го порядков специального вида, выписывая для них характеристические полиномы. Работа носит элементарный характер.

В. М. Волков

6 В149. Последовательный метод статистической оценки средней цены изделия при неизвестной дисперсии в партии. Бендерский Я. М. «ЎзССР Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР», 1959, № 11, 3—5 (рез. узб.)

Имеется партия изделий объема N, из которой делается выборка объема n для статистической оценки средней цены одного изделия. Предполагается, что стоимость партии имеет нормальное распределение. Пусть γ обозначает стоимость контроля одного изделия. Предполагается следующая методика для определения объема выборки. Первое приближение для этого объема, n, вычисляется по формуле Штейнгауза (Steinhaus H., Studia i Prace statystyczne, Warszava, 1950); затем производится выборка объема n_1 (например, $n_1 = n/2$), по которой определяется эмпирическая дисперсия s^2; при помощи распределения χ^2 вычисляется верхняя оценка σ_0^2 дисперсии генеральной совокупности. Уточненное необходимое число наблюдений n^* определяется как λN, где λ — вещественный корень уравнения $\lambda^3(1-\lambda) = \sigma_0^2/2\pi\gamma^2 N$. Если $n^* > n_1$, объем выборки можно довести до n^*, либо сделать дополнительную выборку объема $(n^* - n_1)/2$ для уточнения дисперсии генеральной совокупности. В случае отсутствия нормальности генеральной совокупности предлагается разбивать выборку на группы для возможности использования теоремы Ля-

пунова. Настоящий результат является обобщением работы автора (РЖМат, 1960, 9330) на случай неизвестной дисперсии. И. Н. Коваленко

6 В150. Об одном случае распределения числа дефектных единиц в партиях изделий. Кордонский Х. Б. «Теория вероятностей и ее применения», 1958, **3**, № 3, 354—358 (рез. англ.)

Рассматривается следующая математическая модель процесса производства. Производятся партии в N изделий каждая. Вероятность разладки процесса постоянна. Вероятность появления дефектного изделия постоянна: $q>0$. По изготовлении каждых m изделий проводится профилактический контроль, при котором разладка обнаруживается с вероятностью $Q(q)$. По вскрытии разладки процесс отрегулировывается и вероятность возникновения дефектного изделия сводится к 0. В таких предположениях число X дефектных изделий в партии есть сумма Z случайных величин с биномиальным распределением, причем Z есть сумма случайных величин, связанных в цепь Маркова. Из этих утверждений вытекает, что X распределено асимптотически нормально. Затем автор исследует распределение X при $m=N$ и находит, что оно схоже с распределением Пуассона.

J. Oderfeld

6 В151. Об эффективности последовательной выборки, основанной на шаблонах. Bhattacharayya A. K. A note on the efficiency of sequential sampling plans based on gauging, «Calcutta Statist. Assoc. Bull.», 1960, **9**, № 35, 117—121 (англ.)

Рассматривается критерий для проверки гипотезы $H(\Theta=\Theta')$ против альтернативы $H(\Theta>\Theta')$, основанный на числе изделий, проходящих и не проходящих через два шаблона размеров G_1 и G_2. Для частного случая подсчитываются наивыгоднейшие размеры шаблонов. Для этого случая сравнивается число наблюдений, требующееся для проверки гипотезы с помощью шаблонов и по точным наблюдениям. О. М. Калинин

6 В152. Статистический анализ качества производственной продукции, основанный на использовании индивидуальных выборочных значений. Žaludová A. H. Statistical quality control of production processes using individual sample values. «Bull. Inst. internat. statist.», 1958, **36**, № 3, 573—578 (англ.; рез. франц.)

Результат производственного процесса характеризуется нормальной величиной. Известны допустимые размеры изделий. Производится выборка объема n из партии изделий. О качестве производимой продукции можно судить по распределению n значений выборки по пяти участкам, на которые разбивается числовая ось. Приводится таблица для расчета разбиения числовой оси.

Е. С. Кочетков

6 В153. Коэффициент использования материала, обладающего случайными дефектами, при линейной раскройке. Kreweras G. Rendements de découpage d'une matière linéraie à défectuosités accidentelles, «Rev. franç. rech. opérat.», 1959, **3**, № 11, 72—87 (франц.)

Имеется кусок материала длины t, из которого требуется нарезать изделия единичной длины. Материал может обладать случайными дефектами. Возникает задача об определении коэффициента использования материала при наивыгоднейшем способе раскройки. В предположении, что дефекты распределены вдоль материала по закону Пуассона, а сами дефекты — точечные, автор получает выражение для математического ожидания коэффициента использования материала. Далее рассматривается обобщение, состоящее в том, что каждый дефект имеет случайную протяженность, не зависящую от протяженности других дефектов. Приводимая автором формула (9) для математического ожидания коэффициента использования материала R неверна: при $T>1$ вероятность выкроить хотя бы одно изделие, очевидно, превосходит $e^{-\lambda}$ при любом распределении протяженности дефекта, т. е. $R>t^{-1}R^{-\lambda}>0$, в то время, как формула (9), зависящая от одних средних, дает $R\to 0$ при стремлении к бесконечности средней протяженности дефекта.

И. Н. Коваленко

6 В154. Применение математической статистики к задачам автоматизации машиностроительных производств. Кутай А. К. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван. АН АрмССР, 1960, 210—222

6 В155. Приложимость вероятностных методов в исследовательской работе биологов. Смирнов Л. В. В сб. «Применение матем. методов в биол.» Л., Ленингр. ун-т, 1960, 22—26

Общие замечания. Р. Л. Добрушин

6 В156. О некоторых разделах теории вероятностей, имеющих непосредственное отношение к проблемам биологии и медицины. Гнеденко Б. В. В сб. «Применение матем. методов в биол.» Л., Ленингр. ун-т, 1960, 6-16

Обзор различных теоретико-вероятностных методов, приложимых в биологии, и конкретных возможностей их использования. Р. Л. Добрушин

6 В157. Стохастические модели в генетике популяций. Malecot G. Les modèles stochastiques en génétique de population. «Publs Inst. statist. Univ. Paris», 1959, **8**, № 3, 173—210 (франц.)

Рассматриваются различные модели генетики популяций. Предполагается, что размер популяции не меняется. В модели A изучаются частоты q, $q^1,\ldots,q^{(p)},\ldots$ гена a в поколениях $F_n, F_{n+1},\ldots,F_{n+p},\ldots$. Заданы вероятности мутаций $A\to a$ и $a\to A$. Предполагается, что частоты образуют цепь Маркова. Получены математическое ожидание и дисперсия предельного закона распределения $q^{(p)}$ при $p\to\infty$. В моделях C, D учитывается мутация и миграция между несколькими группами (без селекции). Модель E описывает случай селекции и мутации в изолированной группе. В модели F миграция между группами предполагается постоянной, а вероятности мутаций и коэффициенты селекции считаются переменными.

В. П. Чистяков

6 В158. О числе самостерильных аллелей, поддерживаемых в равновесии данной скоростью мутации, в популяции фиксированного объема: пересмотр результатов. Wright Sewall. On the number of self-incompatibility alleles maintained in equilibrium by a given mutation rate in a population of given size: a reexamination. «Biometrics», 1960, **16**, № 1, 61—85 (англ.)

Около двадцати лет назад у растения Oenothera organensis, растущего в каньонах штата Нью-Мексико, было обнаружено поразительно большое число самостерильных аллелей (не менее 37). Попытки теоретического объяснения этого явления привели к ряду численных расчетов, основанных на различных гипотезах о коэффициентах уравнения Фоккера — Планка и разных аппроксимациях для дисперсии при выборочном определении этих коэффициентов и при нахождении стационарного распределения. В статье подробно критикуется подход Фишера, результаты которого сравниваются с результатами автора. Приведено 6 таблиц с числовыми примерами и на основе их построено 4 графика.

О. М. Калинин

6 В159. Изменчивость организмов в опытах с ослаблением (дозы). Armitage Peter. Host variability in dilution experiments. «Biometrics», 1959, **15**, № 1, 1—9 (англ.)

Вероятность заражения r_i лиц из n_i при введении инфекции дозы γx_i (γ — начальная концентрация, x_i — коэффициент разбавления) равна (см. Armitage P., Spicer C., J. Hyg. Camb., 1956, **54**, 401 — 414)

$$C_{n_i}^{r_i} P_i^{n_i-r_i}(1-P_i)^{r_i}, \text{ где } P_i=(1+\gamma X_i V)^{-\frac{1}{V}}.$$

Параметры γ, V неизвестны. В реферируемой статье рассматриваются 3 метода проверки гипотезы о том, что $V=0$. Первый основан на оценке V и γ по методу мак-

симального правдоподобия. Два других более грубы, но асимптотически эквивалентны первому и годны для другой возможной модели явления. С. С. Кислицын

6 В160. Дисперсия генетического коэффициента корреляции. Robertson Alan. The sampling variance of the genetic correlation coefficient, «Biometrics», 1959, **15**, № 3, 469—485 (англ.)

Для анализа изменчивости признака применяется обычная схема дисперсионного анализа: разложение дисперсии на компоненты. В терминах этих компонент и определяется генетический коэффициент корреляции двух признаков. Выводятся формулы для дисперсии коэффициента корреляции. Делается попытка обобщить результаты на случай разной наследуемости (heritability) признаков. В терминах генетического коэффициента корреляции разбирается вопрос о взаимодействии генотипа и окружающей среды (группы индивидуумов оказываются в P разных условиях). Рассматривается вопрос оптимального выбора размеров групп индивидуумов при планировании экспериментов для определения коэффициентов. О. М. Калинин

6 В161. Анализ количественного ответа в серии биологических испытаний на одних и тех же объектах. Ashford J. R., Smith C. S., Brown Susannah. The quantal response analysis of a series of biological assays on the same subjects, «Biometrica», 1960, **47**, № 1—2, 23—32 (англ.)

Партия биологических объектов (животных) несколько раз подвергается действию яда, эффект которого предполагается необратимым. Доза яда, как обычно, измеряется в «эквивалентных отклонениях». Ищется оценка средней эквивалентной дозы, т. е. дозы, при которой вероятность прореагировать для каждого объекта равна 0,5. Находятся уравнения максимального правдоподобия для неизвестных параметров. Обрабатываются данные о засорении легких у шахтеров. О. М. Калинин

6 В162. Относительно аппроксимаций дисперсии в стохастических моделях биологических систем с дискретным временем. Leslie P. H. A note on some approximations to the variance in discrete-time stochastic models for biological systems. «Biometrika», 1960, **47**, № 1-2, 196—197 (англ.)

Рассматривается процесс возникновения и исчезновения частиц, для которого число частиц N_t в момент t удовлетворяет соотношениям:

$$M\{N_{t+1}|N_t\} = \lambda_t N_t,$$

$$\sigma^2\{N_{t+1} \mid N_t\} = \varphi_t M\{N_{t+1} \mid N_t\},$$

где $\sigma^2\{N_{t+1} \mid N_t\}$ — условная дисперсия N_{t+1}, а λ_t и φ_t — некоторые известные функции. При некоторых предположениях относительно рассматриваемого процесса предлагается простая формула, аппроксимирующая φ_t. Приводится таблица точных и приближенных значений φ_t. М. И. Фортус

6 В163. Математические модели эпидемий. Бессмертный Б. С. В сб. «Применение матем. методов в биол.» Л., Ленингр. ун-т, 1960, 110—119

Критический разбор оснований теории и оценка ее значения. Р. Л. Добрушин

6 В164. Биологические эксперименты с неортогональными данными. Das M. N. Bio-assays with non-orthogonal data. «J. Indian Soc. Agric. Statist.», 1957, **9**, № 1, 67—81 (англ.)

Эксперименты с неортогональными данными обычно проводятся в сельскохозяйственных исследованиях. Автор предлагает один метод анализа таких данных в биологическом эксперименте по сравнению эффективности действия двух препаратов яда (стандартного и испытываемого) на совокупности живых организмов (например, насекомых). Эксперимент планируется в полных блоках и сбалансированных неполных блоках. Дисперсионный анализ позволяет оценить значимость получаемых результатов. Метод иллюстрирован числовым примером. J. Perkal

6 В165. О применении некоторых упрощенных методов определения коэффициентов корреляции. Каминский Л. С. В сб. «Применение матем. методов в биол.» Л., Ленингр. ун-т, 1960, 37—46

Обсуждаются методы приближенного вычисления коэффициента корреляции по опытным данным. Р. Л. Добрушин

6 В166. Новая интерпретация некоторых стохастических моделей обучения. Theodorescu Radu. Nouvelle interprétation de certains modèles stochastiques pour apprendre. «Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur.», 1960, **28**, № 2, 153—155 (франц.)

Вводятся в рассмотрение следующие последовательности случайных величин $\{\xi_n\}$; $n = 1,2, \ldots$: для $\xi_1 P\{\xi_1 = \omega_k\} = p_k^{(1)}; k=1,\ldots,m$. Далее, априорная вероятность того, что ξ_2 будет принимать значения $\omega_k (k=1,\ldots,m)$ с вероятностями $\psi_{ki}(p_1^{(1)}, \ldots, p_m^{(1)})$ равна $p_i^{(1)}$. Для выяснения того, какие именно функции ψ_{ki} будут характеризовать величину ξ_2, проводится дополнительный эксперимент, i-й исход которого имеет вероятность $p_i^{(1)}$ и говорит о том, что ξ_2 принимает значения ω_k с вероятностями $\psi_{ki}(p_1^{(1)}, \ldots, p_m^{(1)})$. Пусть апостериори выяснилось, что $i = i_0$. Обозначим $p_k^{(2)} = \psi_{ki_0}(p_1^{(1)}, \ldots, p_m^{(1)})$. Тогда априорная вероятность того, что ξ_3 будет принимать значения $\omega_k (k = 1, \ldots, m)$ с вероятностями $\psi_{ki}(p_1^{(2)}, \ldots, p_m^{(2)})$ равна $p_i^{(2)}$ и т. д. Функции ψ_{ki} заданы и удовлетворяют условиям: 1) $0 \leqslant \psi_{ki} \leqslant 1$, 2) $\sum_{k=1}^{m} \psi_{ki} \equiv 1$. В дальнейшем эта схема несколько усложняется. Упоминаются задачи, где возникают такие схемы. Р. Ф. Матвеев

6 В167. Метод измерения корреляционной функции и распределения координат для двух временных функций. Putz R. R. A method for the measurements of the correlation function and ordinate distributions for two time-history functions. Institute of Engineering Research, Univ. of California, Berkeley, Calif., 1957, 39 pp. (англ.)

Оценка корреляции и спектра двух временных рядов на основе только знаков отклонений от средних значений. Перевод из Math. Revs, 1958, **19**, № 4. P. Whittle

6 В168. О страховании жизни с оптированием. Hansen Chr. Über Lebensversicherungen mit Optierungsrecht, «Skand. aktuarietidskr.», 1959 (1960), № 3-4, 125—131 (нем.)

6 В169 Д. Пропускная способность многолучевых каналов связи. Цыбаков Б. С. — Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. физ.-техн. ин-т, М., 1960

См. также: 6 А18, 6 А113, 6 А122, 6 Б8, 6 Б345, 6 Б358, 6 Б373

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

6 В170. Метод для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка и его применение в геометрической оптике. Jurek Bohumil. Metoda numerického řešení obyčejných diferenciálních rovnic 1. Řádu a její použití v geometrické optice. «Aplikace mat.», 1959, **4**, № 3, 203—210 (чешск.; рез. русск., франц.)

Пусть задано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x,y) \qquad (1)$$

и пусть в некотором интервале известно его приближенное дифференцируемое решение $y = F(x)$, проходящее через точку (x_0, y_0). В качестве нового приближенного решения берется функция $\widetilde{F}(x; y_1, \ldots, y_n)$, имеющая полный дифференциал в $(x, y_1, \ldots, y_n)$ и удовлетворяющая условиям

$$\widetilde{F}(x_k; y_1, \ldots, y_n) = y_k, \quad k = 1,2, \ldots, n.$$

Поправки погрешностей $\Delta y_k = \widetilde{F}(x_k; y_1, \ldots, y_n) - F(x_k)$ определяются так, чтобы $\widetilde{F}$ удовлетворяла дифференциальному уравнению (1) в точках x_k с точностью до величин 1-го порядка в Δy_k; это означает, что Δy_k являются решением системы

$$F'(x_m) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F'}{\partial y_k}\right)_m \Delta y_k = f(x_m, F(x_m)) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_m \Delta y_m.$$

Автор применяет этот метод для решения одной оптической системы, которая является в очень приближенном смысле апланатической. O. Vejvoda

6 В171. Об оценке точности моделирующих машин, предназначенных для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Доступов Б. Г. В сб. «Теория машин автомат. действия и теория точности в машиностр. и приборостр.» М., Машгиз, 1960, 158—168

Рассматриваются вопросы, связанные с расчетами точности работы моделирующей машины, интегрирующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, на основе учета ошибок отдельных блоков, входящих в схему машины. В работах этого типа обычно предполагается возможность линеаризации правых частей интегрируемых дифференциальных уравнений по величинам ошибок блоков. В данной работе предполагается более слабое ограничение — соответствующая линеаризация интегралов решаемой системы. Реальная система, интегрируемая машиной, имеет вид:

$$\frac{dX_i}{dt} = F_i(X_1, X_2, \ldots, X_n, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m, t)$$

$(i = 1,2, \ldots, n)$, где $\Phi_j (j = 1,2, \ldots, m)$ — ошибки блоков. Решается задача определения математического ожидания и корреляционной функции величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Устанавливается, что математические ожидания указанных величин, $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_n$, являются интегралами системы

$$\frac{d\overline{X}_i}{dt} = F_i(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_n, \overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2, \ldots, \overline{\Phi}_m, t) \qquad (1)$$

$$(i = 1,2, \ldots, n),$$

где $\overline{\Phi}_j (j = 1,2, \ldots, m)$ — математические ожидания ошибок блоков. Корреляционные функции

$$r_{is}(t, \tau) = M[(X_i - \overline{X}_i)(X_s - \overline{X}_s)], \quad i,s = 1,2, \ldots, n,$$

выражаются в виде $r_{is} = \widetilde{r}_{is} \mid \Delta X_s \mid_{\max}$, где $\mid \Delta X_s \mid_{\max}$ — масштабный множитель, который выбирается более или менее произвольно. Функции $\widetilde{r}_{is}$ являются разностями между решениями системы

$$\frac{d(\overline{X}_i + \widetilde{r}_{is})}{dt} = F_i(\overline{X}_1 + \widetilde{r}_{1s}, \ldots, \overline{X}_n + \widetilde{r}_{ns}, \qquad (2)$$

$$\overline{\Phi}_1 + M_{s1}\widetilde{\rho}_{s1}, \ldots, \overline{\Phi}_m + M_{sm}\widetilde{\rho}_{sm}, t) \qquad \begin{pmatrix} i = 1,2, \ldots, n \\ s = 1,2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

и соответствующими решениями системы (1). В системе (2) $M_{sk} = \mid \Delta\Phi_k \mid_{\max} / \mid \Delta X_s \mid_{\max}$ — масштабные множители,

$$\widetilde{\rho}_{sk}(\tau,t) = M\left[\frac{\Delta X_s(\tau)\Delta\Phi_k(t)}{\mid \Delta\Phi_k \mid_{\max}}\right] \quad (k = 1,2, \ldots, m).$$

В работе имеются опечатки. М. Л. Платонов

6 В172. Приближенное решение уравнения наполнения и опорожнения шлюзов. Беленький М. Я. «Тр. Ленингр. ин-та водн. трансп.», 1960, вып. 8, 3—8

Процесс наполнения и опорожнения шлюзов описывается дифференциальным уравнением $y'' - f(t)y'^2 + by = 0$. Путем замены переменных это уравнение сводится к уравнению $y'' + y = f(x)y'^2$, для которого строится приближенное решение методом последовательных приближений в соединении с методом Чаплыгина в промежутке, где производная искомой функции не положительна. Идея Чаплыгина использована в двух вариантах для приближений по первой и второй производной. Доказывается сходимость процесса. Приведен числовой пример.

И. Ф. Шелихова

6 В173. О некоторых электрических дифференцирующих схемах и о их приложении к решению дифференциальных уравнений. Усынин В. И. «Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика», 1960, № 9, 3—5

Рассматриваются электрические схемы, предназначенные для приближенного решения обыкновенных дифференциальных и некоторых интегральных уравнений, реальная возможность осуществления которых подтверждена экспериментальными исследованиями. Обыкновенное линейное дифференциальное уравнение

$$y = f(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}), \qquad (1)$$

представляют при помощи подходящей интерполяционной формулы. Отбрасывая остаточный член и выражая $y_i^{(k)}$ через $y_j^{(k)}$, записывают

$$y_i^{(k)} = y_j^{(k)} + \Delta y_i^{(k)}. \qquad (2)$$

Значения функции и коэффициентов в (2) трактуются как значения напряжений и коэффициентов передачи некоторых многополюсников в схемах. В качестве многополюсников применены многообмоточные трансформаторы, коэффициенты передачи которых определяются типом интерполяционной формулы, положенной в основу уравнения (1) и находятся с помощью соответствующих таблиц и формул. И. Ф. Шелихова

6 В174. Решение основной задачи внешней баллистики. Воробьев Л. М. «Прикл. матем. и механ.», 1958, 22, № 3, 350—358

Излагается приближенный метод (близкий к методу Чаплыгина) для решения системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$dy_1/dx = f_1(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$$
$$dy_2/dx = f_2(x, y_1, y_3, \ldots, y_n)$$
$$dy_3/dx = f_3(x, y_1, y_4, \ldots, y_n)$$
$$dy_{n-1}/dx = f_{n-1}(x, y_1, y_n)$$
$$dy_n/dx = f_n(x, y_1).$$

6 В175. О механизированном решении некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Тлегенов К. Б. «КазССР Ғылым Акад. хабарлары, Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ.», 1957, вып. 6(10), 87—96 (рез. каз.)

6 В176. О построении начальной пары приближений в методе Чаплыгина для дифференциальных уравнений 1-го порядка. Попов А. Г. «Тр. Ростовск.-н/Д. ин-та инж. ж.-д. трансп.», 1959, вып. 28, 83—99

В вводной части статьи дан краткий исторический обзор методов, примыкающих к методу Чаплыгина. Далее автор, используя метод Пикара, а также варьируя пра

вую часть уравнения $y'=f(x, y)$, получает приемы построения начальных приближений в методе Чаплыгина. Приведены три примера. Я. И. Алихашкин

6 В177. Новые уточненные формулы Рунге—Кутта для дифференциальных уравнений второго порядка. Fehlberg Erwin. Neue genauere Runge—Kutta—Formeln für Differentialgleichungen zweiter Ordnung. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, **40**, № 5-6, 252—259 (нем.; рез. англ., русск.)

В другой работе автора (РЖМат, 1959, 10476) указан способ уменьшения погрешности метода Рунге-Кутта для приближенного решения дифференциального уравнения n-го порядка с аналитически заданной правой частью; в частности, для дифференциального уравнения второго порядка новые формулы дают решение с точностью до h^6 включительно, а производную от решения — с точностью до h^5 включительно. В реферируемой работе в результате m-кратного дифференцирования и преобразования дифференциального уравнения второго порядка выводятся формулы Рунге-Кутта для преобразованного дифференциального уравнения с точностью до h^{m+5} как для решения, так и для его производной. Решен пример. Указывается, что предложенный способ может быть перенесен на систему дифференциальных уравнений второго порядка. Д. Б. Тополянский

6 В178. Границы ошибок для трехточечных методов интегрирования. Hull T. E., Newbery A. C. R. Error bounds for a family of three-point integration procedures. «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1959, **7**, № 4, 402—412 (англ.)

Оцениваются ошибки, возникающие при численном интегрировании дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0)=y$ в случае использования трехточечной однопараметрической формулы

$$y_n = ay_{n-2} + (1-a)\,y_{n-1} +$$

$$+ h\,[(5a-1)\,y'_{n-2} + (8+8a)\,y'_{n-1} + (5-a)\,y'_n\,]/12 + T_n,$$

где h — шаг интегрирования, T_n — ошибка метода. Если z_i — есть численное значение, полученное для y_i, $z'_i = f(x_i, z_i)$, то справедлива формула:

$$z_n = az_{n-2} + (1-a)\,z_{n-1} + h\,[(5a-1)\,z'_{n-2} +$$

$$+ (8+8a)\,z'_{n-1} + (5-a)\,z'_n\,]/12 + r_n,$$

где r_n — ошибка округления. Вводятся обозначения:

$$e_i = y_i - z_i;\ e'_i = f(x_i, y_i) - f(x_i, z_i) = g_i e_i;$$

$$g_i = \partial f(x_i, \theta_i)/\partial y$$

$$C = \max \left| \frac{a + h(5a-1)\,g_{n-2}/12}{1 - h(5-a)\,g_n/12} \right|;$$

$$B = \max \left| \frac{1 - a + h(8+8a)\,g_{n-1}/12}{1 - h(5-a)\,g_n/12} \right|;$$

$$E = \max \left| \frac{T_n - r_n}{1 - h(5-a)\,g_n/12} \right|;\ E_0 = |e_0|;\ E_1 = |e_1|.$$

Справедливо соотношение: $E_n = CE_{n-2} + BE_{n-1} + E$; $|e_i| \leqslant E_i$ для $i = 0, 1, 2, \ldots$ Предполагается, что функция y и ее первые четыре производные по x, а также $\partial f/\partial y$ непрерывны в рассматриваемой области. В этих предположениях доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Если $-M_2 \leqslant \partial f/\partial y \leqslant -M_1 < 0$ и если $0 < h \leqslant \frac{3}{M_1+M_2}\cdot\frac{1-a}{1+a}$ для любого значения a такого, что $1/5 \leqslant a < 1$, тогда $|e_n| < \frac{r+T}{(1+a)\,hM_1} + \bar{e}$, где $\bar{e} = \max(|e_0|, |e_1|)$, $|T_n| \leqslant T$, $|r_n| \leqslant r$.

Теорема 2. Если $-M_3 \leqslant \partial f/\partial y \leqslant 0$ и если $0 < h \leqslant 3(1-a)/M_3(1+a)$ для любого значения a такого, что $1/5 \leqslant a < 1$, тогда $|e_n| < \frac{r+T}{(2-a)\,h}\,[x_n - x_0] + \bar{e}$.

Теорема 3. Если $|\partial f/\partial y| \leqslant M$ и если $0 < h < 12/M(5-a)$ для любого значения a такого, что $1/5 \leqslant a < 1$, тогда $|e_n| < \frac{r+T}{(1+a)hM}\left(s_1^n - 1\right) + \bar{e}\,s_1^n$, где $s_1 = (B + (B^2+4C)^{1/2})/2$ и $1 < s_1 < 1 + \frac{1-a+h(8+8a)M/12}{1-h(5-a)M/12}$.

Теорема 4. Если $|\partial f/\partial y| \leqslant M$ и если $0 < h < 1/M$, тогда

$$|e_n| < \frac{r+T}{2hM}\left(e^{4(x_n-x_0)M/3} - 1\right) + \bar{e}\,e^{4(x_n-x_0)M/3}.$$

Исследуется вопрос о лучшем (в смысле максимально возможного значения шага h и допустимой величины $|e_n|$) процессе и выводятся соответствующие соотношения, определяющие выбор величины a для такого процесса. Даны примеры. Библ. 6 назв.

Ю. М. Барабошкин

6 В179. Замечание о численном нахождении первой производной из таблицы функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению второго порядка. Miller J. C. P. Note on the numerical evaluation of a first derivative from a table of a function satisfying a second order differential equation. «Comput. J.», 1960, **3**, № 2, 112—113 (англ.)

Рассматривается таблица равноотстоящих значений функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению $y''=f(x, y)$. Существенно используя то обстоятельство, что табулируемая функция является решением дифференциального уравнения второго порядка, выводится формула для вычисления первой производной табулируемой функции, которая дает бо́льшую точность, чем обычные формулы вычисления первой производной. Приводится числовой пример. М. А. Алексидзе

6 В180. Численное решение линейных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Анисимов А. Г. «Сообщ. АН ГрузССР», 1960, **24**, № 4, 385—389

Рассматривается граничная задача

$$y'' + \varphi(x)\,y = f(x) \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$y(a) = p,\ y(b) = q. \qquad (2)$$

Для численного решения задачи (1) — (2) предлагается воспользоваться формулой

$$y_{i-1} = y_i + \frac{\eta_i - y_i}{x_i - \xi_i}\,h \quad (i = n, n-1, \ldots, 2), \qquad (3)$$

где (ξ_i, η_i) — координаты точки S_i, лежащей на хорде $K_{i-1}K_i$ (K_{i-1}, K_i — точки искомой интегральной кривой, $S_0 = K_0$), и для вычисления которых выводятся следующие уравнения

$$\xi_{i+1} = x_i - \frac{(x_i - \xi_i)\,(12 + h^2\varphi_{i+1})}{12 + h^2\varphi_{i-1} - h\,(x_i - \xi_i)\,D(\varphi_i)}, \qquad (4)$$

$$\eta_{i+1} = \eta_i - \frac{h\,(x_i - \xi_i)\,[D(f_i) - \eta_i D(\varphi_i)]}{12 + h^2\varphi_{i-1} - h\,(x_i - \xi_i)\,D(\varphi_i)}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (5)$$

где $D(\varphi_i) = \varphi_{i-1} + 10\varphi_i + \varphi_{i+1}$. Формулы (3) и (4) точны, а остаточный член формулы (5) при определенных условиях, накладываемых на $\varphi(x)$ и $f(x)$, будет $O(h^5)$, что дает для погрешности степень точности h^3. Примеры отсутствуют. М. А. Алексидзе

6 В181. Метод «поочередного исправления» для численного решения двуточечных краевых задач. Pope David A. A method of «alternating corrections» for the numerical solution of two—point boundary value problems. «Math. Comput.», 1960, **14**, № 72, 354—361 (англ.)

Для численного решения краевой задачи

$$y'' = f(x, y),\ y(0) = a,\ y(1) = b, \qquad (1)$$

где $f(x, y)$ имеет непрерывные вторые производные, отрезок $[0, 1]$ разбивается точками $x_j\ (j = 0, 1, \ldots, 2n)$ на $2n$ равных частей и используется формула $(h = 1/2n)$:

$$y_j = \frac{1}{2}(y_{j+1} + y_{j-1}) - \frac{h^2}{4}[f(x_{j+1}, y_{j+1}) + f(x_{j-1}, y_{j-1})] \equiv Ky_j. \qquad (2)$$

При этом «поочередность исправления» (итерирования) заключается в применении формулы (2) сначала с нечетными индексами j, затем с четными, потом опять с нечетными и т. д.:

$$y_j^{s+1} = Ky_j^s \quad \text{для } j \text{ нечетных},$$
$$y_j^{s+1} = Ky_j^{s+1} \quad \text{для } j \text{ четных}, \qquad (3)$$
$$y_0^{s+1} = 0,\ y_{2n}^{s+1} = b\ (s - \text{номер итерации}).$$

При этом начинают вычисление обычно с $n-1$ и дальше последовательно делят подынтервалы пополам. В результате большая часть «исправлений» осуществляется на более ранних этапах (при меньших значениях n) вычисления, когда грубая аппроксимация к решению задачи (1) получается сравнительно легко. В этом заключается основное преимущество метода (3) перед обычным методом конечных разностей. Исследованы устойчивость и равномерная сходимость (с оценкой погрешности) $O(h^2)$ метода (3). Приведены результаты двух расчетов ($f(x, y) = 2x^2$ и $f(x, y) = 2y^2$) методом (3) на быстродействующей вычислительной машине УНИВАК.

В. К. Саульев

6 В182. О методе сеток для третьей краевой задачи. Лебедев В. И. «Докл. АН СССР», 1960, **134**, № 2, 267—270

С помощью разностной функции Грина даются оценки погрешности, возникающей от применения разностных схем, рассмотренных автором в работе (РЖМат, 1960, 6959). Выписаны трехточечная положительная схема (определение приводится) точности h и четырехточечная схема точности h^2 для третьей краевой задачи.

Я. И. Алихашкин

6 В183. Приближение решений краевых задач для общих эллиптических систем. Халилов З. И. «Тр. Ин-та физ. и матем. АН АзербССР», 1953, **6**, 88—96 (рез. азерб.)

Исследуется один метод наилучшего приближения решения краевой задачи: $L(U) = 0$ в связной области D, $R_k(U) = f_k(S)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ на границе S, где дифференциальные операторы L и R_k предполагаются линейными. Идея рассматриваемого метода заключается в том, что найденное по определенной схеме решение уравнения краевой задачи удовлетворяется точно, а граничные условия — приближенно, т. е. проблема сводится к аппроксимации одной или системы функций функциями из определенного класса. Если $U = A(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ (A — линейный оператор) есть общее представление достаточно регулярных решений уравнения $L(U) = 0$, где φ_k принадлежат некоторому классу K функций, определенных в $\overline{D}$, тогда решение краевой задачи сводится к определению функций $\varphi_k \in K$ таких, для которых выполняются с наперед заданной точностью граничные условия $R_k A(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = f_k(S)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. При этом предполагаются выполненными следующие условия: 1) отображение $U = A(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ взаимно однозначно, в частности при $U = 0$ $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_m = 0$ и обратно; 2) краевая задача имеет единственное решение; 3) класс K характеризуется тем свойством, что каждое множество $\{\varphi_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ имеет счетный базис $\{\omega_l^{(k)}\}$, где $\omega_l^{(k)}$ — некоторые функции, определенные D. Функции φ_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ выбираются в виде

$$\sum_{l=1}^{n_k} \lambda_{l+n_1 \ldots n_{k-1}} \omega_l^{(k)},$$

где n_k — некоторые натуральные числа. Тогда

$$R_k A(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \equiv$$
$$\equiv R_k A\left(\sum_{l=1}^{n_1} \lambda_l \omega_l^{(1)}, \ldots, \sum_{l=1}^{n_m} \lambda_{l+n_1+\ldots+n_{m-1}} \omega_l^{(m)}\right) \equiv$$
$$\equiv \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu g_\nu^{(k)} \quad (k = 1, 2, \ldots, m;\ n = n_1 + \ldots + n_m),$$

причем доказывается, что система $\{g_1^{(k)}, \ldots, g_n^{(k)}\}$ линейно независимая. Задача нахождения наилучшего приближения сводится к решению задачи о минимуме для функции

$$\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{m} \int_0^1 [f_k(S) - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu g_\nu^{(k)}(S)]^2\, dS,$$

т. е. к задаче решения системы линейных алгебраических уравнений $\partial\varphi/\partial\lambda_\nu = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Доказывается, что при фиксированных натуральных числах $n_1, n_2, \ldots, n_m$ существует единственное число $\varepsilon_{n_1 n_2 \ldots n_m} = \min_{(\lambda_\nu)} \varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. В качестве примера рассматривается плоская задача Дирихле.

Д. Ф. Давиденко

6 В184. Приближенный метод решения задач Гильберта и Пуанкаре. Клабукова Л. С. «Вычисл. математика», сб. 3, 1958, 34—87

Гл. I посвящена определению методом сеток гармонической функции u и ей сопряженной функции v по заданным значениям функции u на границе. Предлагаются разностные схемы для решения этой задачи. Доказывается, что при ограниченности 6-х производных функций u в замкнутой области погрешность в определении функции u является величиной порядка h^3, а в определении функции v — порядка h^2. В гл. II изложен приближенный метод решения задачи Гильберта, которая заключается в определении в области H_0 — голоморфной функции $f(z) = u + iv$, удовлетворяющей граничному условию $\alpha u + \beta v = c$. Задача решается методом конечных разностей с предварительным сведением ее к двум задачам Дирихле. В гл. III, IV излагается приближенный метод задачи Пуанкаре для уравнения

$$\Delta w + p\frac{\partial w}{\partial x} + q\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

и граничных условий

$$\alpha\frac{\partial w}{\partial x} + \beta\frac{\partial w}{\partial y} = \gamma,$$

где p, q — функции, непрерывные в замкнутой области, α, β, γ — функции, непрерывные по Гельдеру. Для случая малых коэффициентов задача Пуанкаре сводится к краевой задаче для обобщенной системы Коши — Римана, которая решается методом сеток. В общем случае задача Пуанкаре сводится к нахождению решения интегрального уравнения, решение которого ищется в виде полинома, удовлетворяющего уравнению с наименьшей квадратической погрешностью. Приводятся разностные схемы, аппроксимирующие рассматриваемые краевые условия.

В. И. Лебедев

6 В185. Замечания к альтернирующему методу Шварца. Минасян Р. С. «Сибирск. матем. ж.», 1960, **1**, № 4 ,632—638

На примере решения уравнения Пуассона (задача Дирихле) для области, составленной из двух пересекающихся под прямым углом прямоугольников, автор излагает следующий метод, использующий основную идею альтернирующего метода Шварца. Аналогично методу Шварца ищется решение задачи Дирихле для каждого из прямоугольников. При этом значения искомой функции на отрезках сторон прямоугольников, находящихся внутри заданной области, представляются в виде рядов Фурье, коэффициенты которых определяются из бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.
В. К. Саульев

6 В186. Об одном новом методе численного решения краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений. Положий Г. Н. «Укр. матем. ж.», 1960, **12**, № 3, 308—323 (рез. англ.)

Конечноразностный оператор Лапласа приводит к системе линейных алгебраических уравнений с матрицей $G = S\Lambda S$,

$$s_{ik} = (-1)^{i+n} \sin\frac{ik\pi}{n+1},\ \lambda_{il} = \cos i\,\frac{\pi}{n+1},$$

$$\lambda_{ik} = 0 \text{ при } i \neq k,\ S^2 = E.$$

Умножение системы алгебраических уравнений на S (S — трансформация вектора) приводит к задаче решения простого конечноразностного уравнения. Метод распространяется на решение трехмерных краевых задач и на случай задания области в виде конечной совокупности прямоугольных областей. А. А. Красилов

6 В187. Об одном методе численного решения разностного уравнения Пуассона для произвольных областей. Egerváry E. Über eine Methode zur numerischen Lösung der Poissonschen Differenzengleichung für beliebige Gebiete. «Acta math. Acad. scient. hung.», 1960, **11**, № 3-4, 341—361 (нем.; рез. русск.)

Описан прямой метод обращения матрицы, соответствующей системе пятиточечных сеточных уравнений Пуассона

$$x_{i,j-1} + x_{i,j+1} + x_{i-1,j} + x_{i+1,j} - 4x_{i,j} = -p_{i,j},$$

для случая прямоугольной области. При этом существенно использована специфика (например, блочная структура) обращаемой матрицы. Исходя из полученных результатов для прямоугольной области, автор, применяя процесс «уменьшения ранга», получает формулы для прямого обращения сеточных матриц, соответствующих непрямоугольным областям. Отмечается, что метод может быть применен к другим, в частности, бигармоническим сеточным уравнениям. Имеются числовые примеры для области, имеющей L-форму (форму угла).
В. К. Саульев

6 В188. Решение с повышенной точностью разностных уравнений при помощи сеток из сопротивлений. Landau H. G. High order accuracy in the solution of partial differential equations by resistor networks. «J. Appl. Mech.», 1958, **25**, № 1, 17—20 (англ.)

Описана методика решения на электрической сетке системы разностных уравнений, аппроксимирующей задачу Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = f(x, y)$. При этом для повышения точности автор использует разности высоких порядков, которыми в первом приближении (обычная аппроксимация) пренебрегают.

6 В189. О решении эллиптических дифференциальных уравнений, коэффициенты которых зависят от комплексных параметров. Jantscher Lothar. Über die Lösungen einer partiellen elliptischen Differentialgleishung, deren Koeffizienten von einem komplexen Parameter abhängen. Diss., Naturwiss.—phil. Fak. Techn. Hochschule Braunschweig, 1960. München, 1960, 96 S. «Dtsch. Nationalbibliogr.», 1960, **B**, № 17, 1693 (нем.)

6 В190. Приложение методов Галёркина и Галёркина-моментов к некоторым уравнениям в частных производных типа И. Н. Векуа. Мартынюк А. Е. «Изв. высш. учебн. заведений. Математика», 1960, № 3, 188—204

Устанавливается применимость метода Бубнова—Галёркина к некоторым краевым задачам для уравнений видов

$$(-1)^s \delta^m u + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(x, y)\,\delta^k u = f(x, y);$$

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (1)$$

$$s = \begin{cases} l, & m - \text{четное}, \\ l-1, & m - \text{нечетное}, \end{cases} \quad l = \left[\frac{m+1}{2}\right];$$

$$(-1)^n \Delta^n u + \sum_{k=1}^{n} L_k(\Delta^{n-k} u) = f(x, y),\ n \geqslant 1;$$

$$(-1)^n \delta^{2n} u + \sum_{k=1}^{n} L_k(\delta^{2(n-k)} u) = f(x, y),\ n \geqslant 1, \qquad (2)$$

где

$$L_k = \sum_{p+q \leqslant k} a_k^{p,q}(x, y)\,\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial x^q}.$$

Отметим, что уравнение (1) по существу есть обыкновенное дифференциальное уравнение, для которого сходимость метода Бубнова — Галёркина была ранее установлена другими авторами. Для уравнения (2) результаты автора являются новыми в том смысле, что порядок младших членов уравнения может превосходить половину порядка старших членов.
С. Г. Михлин

6 В191. Разностные уравнения для физических и технических проблем. Schjødt Rolf. Difference equations for physical and technical problems. «Tekn. skr.» (Norge), 1960, № 21, 12 pp., ill. (англ.)

Автор показывает, что во многих случаях (например, в случае узлов, находящихся вблизи криволинейной границы, или в случае узлов, находящихся на «внутренней» границе, т. е. границе между двумя физически различными средами) проще, а иногда и точнее, разностные уравнения получаются непосредственно из условий равновесия (обычно из условия равновесия путем предельного перехода получают дифференциальное уравнение, из которого аппроксимацией производных соответствующими разностными отношениями получают разностное уравнение). Приведены примеры из области теории упругости.
В. К. Саульев

6 В192. Квазитрехдиагональные матрицы и соответствующие разностные уравнения. Schechter Samuel. Quasi—tridiagonal matrices and type—insensitive difference equations. «Quart. Appl. Math.», 1960, **18**, № 3, 285—295 (англ.)

Система линейных уравнений

$$Qv = g \qquad (1)$$

с «квазитрехдиагональной» матрицей Q вида

$$Q = \begin{pmatrix} M_1 & E_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & M_2 & E_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_3 & M_3 & E_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & D_{q-1} & M_{q-1} & E_{q-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & D_q & M_q \end{pmatrix} =$$

$$= [D_n, M_n, E_n]_1^q,$$

где D_n, M_n и E_n — матрицы с одним и тем же числом строк, E_n, M_{n+1} и D_{n+2} — матрицы с одним и тем же числом столбцов, M_n — квадратные матрицы, решается прямым образом путем разложения

$$Q = LU. \quad (2)$$

Здесь $L = [C_n, I_n, 0]_1^q$, $U = [0, A_n, E_n]_1^q$ и I_n — единичная матрица того же порядка, что и M_n. Матрицы A_n и C_n находятся по рекуррентным формулам

$$A_n = M_n - D_n A_{n-1}^{-1} E_{n-1}, \; A_1 = M_1,$$
$$C_n = D_n A_{n-1}^{-1}, \; 1 < n \leqslant q, \quad (3)$$

требующим обращения матриц $A_1, A_2, \ldots, A_q$. Решение данного уравнения (1) получается из соотношений

$$y_n = g_n - C_n y_{n-1}, \; 1 < n \leqslant q, \; y_1 = g_1,$$
$$v_n = A_n^{-1}(y_n - E_n v_{n+1}), \; 1 \leqslant n < q, \; v_q = A_q^{-} y_q, \quad (4)$$

где использована разбивка векторов v и g в соответствии с видом матрицы Q:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_q \end{pmatrix}, \; g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_q \end{pmatrix}.$$

В тех случаях, когда матрицы M_n одного и того же порядка p, а матрицы D_n легко обратимы (этот случай встречается, например, при решении методом сеток уравнения Лапласа в прямоугольнике), метод (3), (4) сводится к обращению только одной матрицы порядка p. Этот случай автор обобщает на области, составленные из конечного числа прямоугольников. Например, решение методом сеток уравнения Пуассона для области L-формы, составленной из двух прямоугольников R_1 и R_2, сводится к обращению двух матриц p_1 и p_2 порядков (p_1 и p_2 — число узлов сетки, находящихся на горизонталях соответственно в прямоугольниках R_1 и R_2). Приводятся достаточные условия, аналогичные условиям, приведенным в книге (Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 1951) для возможности разложения (2). В качестве примера рассмотрена краевая задача для уравнения Трикоми $yu_{xx} - u_{yy} = 6yx - 4y^2 + y - 1 - 2x$. Система сеточных уравнений (с симметрической и положительно определенной матрицей), соответствующая этой краевой задаче, была успешно решена на машине ИБМ-704.

В. К. Саульев

6 В193. Оценка точности решения уравнения Пуассона различными численными методами. Алпатова Р. Л. «Тр. Центр. ин-та прогнозов», 1960, вып. 93, 59—64

Сопоставляются применяемые в задачах динамической метеорологии различные способы численного решения разностного уравнения Пуассона в сеточной прямоугольной области при условии обращения искомой функции в нуль на границе области. Изучается степень точности, достигаемая при решении задачи итерационными методами Ричардсона и Либмана, а также при использовании «локальных» решений, в которых значение искомой функции в узле сетки приближенно находится через значения правой части уравнения в нескольких окружающих ее узлах сетки. Точность решения оценивалась по величине невязки, возникающей при применении того или иного метода к решению задачи с реальными метеорологическими данными. Установлено, что метод Либмана обеспечивает более быструю сходимость решения (в смысле скорости убывания невязки) по сравнению с методом Ричардсона.

С. Л. Белоусов

6 В194. Погрешность усечения в решении уравнения Лапласа при помощи разностных уравнений в прямоугольном параллелепипеде. Springer G. Truncation error in the difference equation solution of Laplace's equation in a rectangular parallelepiped. Ballistic Research Laboratories Aberdeen Proving Ground, Md., Rep., 1953, **881**, 16 pp. (англ.)

Автор аппроксимирует трехмерное уравнение Лапласа $\nabla^2 u = 0$ при помощи обычного семиточечного разностного уравнения $\nabla_h^2 v = 0$, где h — шаг сетки. Затем он получает приближенное решение задачи Дирихле в области R (прямоугольный параллелепипед) с граничной функцией F (предполагается, что она имеет непрерывные шестые производные). Автор доказывает, что $|u - v| \leqslant Mh^2$, где M зависит от R и F.

M. A. Hyman

Перевод из Math. Revs, 1958, **19**, № 6.

6 В195. Численный расчет распределения потенциала решетки, расположенной между двумя параллельными пластинками. Peligry Claude, Mme. Calcul numérique de la répartition du potentiel d'une grille disposée entre deux plaques parallèles. «C. r. Acad. sci.», 1960, **250**, № 25, 4108—4110 (франц.)

Краевая задача для уравнения Лапласа решается методом сеток; полученная при этом система алгебраических уравнений решается по методу Зейделя.

Д. Б. Тополянский

6 В196. О некоторых экстремальных принципах математической физики. Hersch Joseph. Sur quelques principes extrémaux de la physique mathématique. «Enseign. math.», 1959 (1960), **5**, № 4, 249—257 (франц.)

Рассматривается решение $\varphi(x, y)$ задачи Дирихле для уравнения $\Delta\varphi = 0$ в двусвязной области G с контурами Γ_0 и Γ_1 при условиях $\varphi/_{\Gamma_0} = 0$, $\varphi/_{\Gamma_1} = 1$. При оценке интеграла Дирихле $D[\varphi] = \iint \operatorname{grad}^2 \varphi \, dxdy$ автор сопоставляет два принципа: принцип Дирихле и принцип Томсона. В силу первого из них $D[\varphi] \leqslant D[v]$, где v — непрерывно дифференцируемая в области G функция, удовлетворяющая граничным условиям. В силу принципа Томсона $D[\varphi] \geqslant \left(\oint_{\Gamma_1} \mathbf{p}\mathbf{n}\, ds\right)^2 / \iint \mathbf{p}^2 dxdy$, где $\mathbf{p}$ — векторное поле в области G, $\operatorname{div}\mathbf{p} = 0$, n — внешняя нормаль к Γ_1. Затем рассматривается граничная задача колеблющейся мембраны, заключающаяся в нахождении собственных значений и функций уравнения $\Delta\varphi + \lambda_1\varphi = 0$, $\varphi > 0$, в области G с контуром Γ и $\varphi/\Gamma = 0$ (φ — первая собственная функция). Тогда по принципу Релея $\lambda_1 \leqslant R[v] = D[v]/\iint v^2 dxdy$, где v — непрерывно дифференцируемая функция в G, аннулирующаяся на контуре Γ. Возникает вопрос, можно ли сформулировать и в этом случае принцип «типа Томсона», т. е. $\lambda_1 \geqslant ?$. Рассматривая вопрос об электропроводности однородной «двусвязной» пластинки G с «контурами» — электродами Γ_0 и Γ_1, автор формулирует задачу Дирихле об определении потенциала φ, а затем, видоизменяя эту физическую задачу, приходит к новой интерпретации принципов Дирихле и Томсона и к формулировке принципа «типа Томсона» для колеблющейся мембраны.

Д. Б. Тополянский

6 В197. Об одной модификации метода Канторовича. Práger Milan. Sur une modification de la méthode de M. Kantorovitch. «Aplikace mat.», 1960, **5**, № 4, 305—316 (франц.; рез. чешск., русск.)

Несколько видоизмененный метод прямых Л. В. Канторовича (Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М. Л., 1952) применен при приближенном решении краевой задачи Матье—Лауричелла для бигармонического уравнения. Доказана сходимость метода, приведены два числовых примера.

Д. Б. Тополянский

6 В198. Линейчатые оболочки, рассчитанные методом релаксации. Mihăilescu Mircea, Mihăilescu Yvonne. Invelitori de translație calculate prin metoda relaxării. «Studii și cercetări mec. apl. Acad. RPR», 1960, **11**, № 1, 211—237 (рум.; рез. русск., англ.)

Дифференциальные уравнения линейчатых оболочек (рассматриваются поверхности с основными линиями изгиба в виде дуг круга) аппроксимируются простейшими

разностными уравнениями, система которых решается методом релаксации.

6 В199. Специальные блочные итерации и их применение к разностному уравнению Лапласа и бигармоническому уравнению. Keller Herbert. B. Special block iterations with applications to Laplace and biharmonic difference equations. «SIAM Rev.», 1960, **2**, № 4, 277—287 (англ.)

Для решения системы линейных алгебраических уравнений

$$M\varphi = b, \qquad (1)$$

где M — положительно определенная матрица и $M \equiv E - H - V$, $HV = VH$, $H' = H$, $V' = V$ (E — единичная матрица), исследуются итерационные методы вида

$$N\varphi^{(n+1)} = P\varphi^{(n)} + b, \qquad (2)$$

в которых $N(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \alpha E - \beta H - \gamma V$, $P(\alpha, \beta, \gamma) \equiv (\alpha - 1)E - (\beta - 1)H - (\gamma - 1)V$. Здесь α, β и γ — вещественные параметры, удовлетворяющие условиям $|N(\alpha, \beta, \gamma)| \neq 0$ и $\beta\gamma = 0$. Первое условие необходимо и достаточно для существования единственного вектора $\varphi^{(n+1)}$ в (2), второе условие ($\beta\gamma = 0$) введено для облегчения нахождения $\varphi^{(n+1)}$ по $\varphi^{(n)}$. Для сходимости метода (2) достаточно, чтобы собственные значения

$$\lambda_k(\alpha, \beta, \gamma) = 1 - \frac{\mu_k}{\alpha - \beta h_k - \gamma v_k} \qquad (3)$$

(здесь h_k, v_k и μ_k — собственные значения соответственно матриц H, V и M) матрицы $N^{-1}P$ по абсолютному значению не превосходили 1. Автор, полагая $\gamma = 0$ и вводя обозначения $x \equiv \beta/\alpha$, $y \equiv 1/\alpha$, $m_k(x) \equiv \mu_k/(1 - h_k x)$, при которых соотношение (3) принимает вид $\lambda_k(x, y) = 1 - m_k(x)\, y$, доказывает следующую теорему сходимости: Существуют открытые интервалы $0 < x < b$, $0 < y < c(x)$, такие, что для всех (x, y) из этих интервалов имеет место $|N(\alpha, \beta, \gamma)| \neq 0$ и $\lambda^*(x, y) = \max_k |1 - m_k(x)\, y| < 1$. Скорость сходимости метода определяется величиной $-\ln \lambda^*$, зависящей от значений x и y (или α и β). В связи с этим автор показывает, что «наилучшая» схема (2) с $\gamma = 0$ получается при $\alpha = \frac{1}{2}[m^*(x^*) + m_*(x^*)]$, $\beta = \alpha x^*$, где $m^*(x) \equiv \max_k m_k(x)$, $m_*(x) \equiv \min_k m_k(x)$ $x^* \in (a, b)$ есть то значение из x_{rs}, определяемых по формуле $x_{rs} = (\mu_r - \mu_s)/(\mu_r h_s - \mu_s h_r)$, для которого $\lambda^*(x)$ минимально. Для сеточного уравнения Лапласа и бигармонического сеточного уравнения исследованы эти «наилучшие» схемы. В частности, установлено, что для уравнения Лапласа блочный метод одновременного исправления (в блоки объединяются узлы, находящиеся на одной линии) является наилучшим в классе рассматриваемых итерационных методов. Отмечается, что блочные методы последовательного исправления (методы типа метода Либмана), а также методы переменных направлений сходятся быстрее, чем методы рассматриваемого здесь типа. В. К. Саульев

6 В200. Метод прямых в смешанных задачах для параболических систем. Григорьева Е. А. «Докл. АН СССР», 1958, **119**, № 4, 648—651

Рассматривается вопрос о решении в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t < \infty$ системы уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \qquad (1)$$

при начальных

$$u_i(x, 0) = 0 \qquad (2)$$

и граничных

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} u_j(0, t) + \frac{\partial u_i(0, t)}{\partial x} = f_i(t),$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{m+i, j} u_j(l, t) + \frac{\partial u_i(l, t)}{\partial x} = f_{m+i}(t) \qquad (3)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

условиях, где a_i, a_{kj} — постоянные числа ($a_i > 0$), $f_k(t)$ — непрерывные функции. Поставленная задача благодаря наличию условий (3), сводится к определению функций $u_i(0, t)$, $u_i(l, t)$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), а они являются решением построенной автором с помощью функции Грина системы интегральных уравнений типа Вольтерра. Рассматривается приближенный метод решения задачи (1) — (3) — метод прямых с заменой производной по t разностным отношением

$$u_{ih}(x, t + h) - u_{ih}(x, t) = a_i h \frac{\partial^2 u_{ih}(x, t + h)}{\partial x^2}. \qquad (4)$$

Решение системы (4) с учетом краевых условий (3) сводится к решению системы алгебраических уравнений с матрицей, распадающейся на треугольные. Доказательство равномерной сходимости на промежутке $0 \leqslant t \leqslant T$ при $h \to 0$ метода прямых сводится к установлению возможности предельного перехода в этой системе линейных алгебраических уравнений для получения системы интегральных уравнений типа Вольтерра, которому удовлетворяют $u_i(0, t)$, $u_i(l, t)$ ($i = 1, 2, \ldots, m$). Для этого доказывается, что разностный оператор задачи (4) правильно приближает в смысле С. Л. Соболева соответствующий интегральный оператор. В. И. Лебедев

6 В201. О распространении погрешности при обращении некоторых трехдиагональных матриц. Lowan Arnold N. On the propagation of errors in the inversion of certain tridiagonal matrices. «Math. Comput.», 1960, **14**, № 72, 333—338 (англ.)

Исследуется накопление погрешностей, возникающих в результате округления, при решении системы

$$Ay = b \qquad (1)$$

(A — трехдиагональная матрица, чьи элементы на главной диагонали равны $2 + 2r$, а вне главной диагонали равны $-r$) методом прогонки (факторизации): $\beta_k = u - r^2 \beta_{k-1}^{-1}$, $\beta_1 = u_1$; $\gamma_k = -r\beta^{-1}$; $z_k = (b_k + r z_{k-1})\beta_k^{-1}$, $z_1 = b_1 u^{-1}$; $y_k = z_k - \gamma_k y_{k+1}$, $y_\mu = z_\mu$. Система (1) получается в результате аппроксимации смешанной задачи для уравнения теплопроводности $\partial T/\partial t = \sigma \partial^2 T/\partial x^2$ при помощи шеститочечного симметричного сеточного уравнения

$$(2 + 2r)\, T_{i, k+1} - r(T_{i-1, k+1} + T_{i+1, k+1}) = (2 - 2r)\, T_{i, k} + r(T_{i-1, k} + T_{i+1, k}),$$

где $r = \sigma \Delta t/(\Delta x)^2$.

Для верхней границы $E^*(y)$ погрешностей округлений в значениях компонент y_k решения системы (1) автор получает следующее выражение:

$$E^*(y) = \frac{\beta_*}{\beta_* - r}\left\{\frac{\beta_*}{\beta_* - r}\left[1 + \frac{b^* + rZ}{\beta_*^2 - r^2}\right] + Y\left(1 + \frac{r}{\beta_*^2 - r^2}\right) + 1\right\}\delta + \frac{\beta_*}{(\beta_* - r)^2} E^*(b), \qquad (2)$$

где $\beta_* = 1 + r + \sqrt{1 + 2r}$, $b^* = \max |b_k|$, $\delta = 0{,}5 \cdot 10^{-p}$ — максимальная погрешность округления (предполагается, что все арифметические операции осуществляются над числами, округленными до p знаков), $Y = \max |y_k|$, $Z = \max |z_k|$. Экспериментальная проверка на одном числовом примере показала, что теоретическая оценка (2) завышена примерно в четыре раза. В. К. Саульев

6 В202. Механическое вычислительное приспособление для анализа одномерных задач теплопроводности. Howland W. E., Trabant E. A., Hawkins G. A. A mechanical computing device for the analysis of one-

dimensional, transient, heat-conduction problems. «Trans. A.S.M.E.», 1957, **79**, 675—679, discussion 679—680 (англ.)

Рассматривается аналоговый механизм для графического решения уравнения $\partial t/\partial r = \alpha \partial^2 t/\partial x^2$, где $\alpha = \alpha(t)$.

G. R. Stibitz

Из Math. Revs, 1958, **19**, № 6.

6 В203. Явные решения одномерного уравнения теплопроводности для неоднородных сред. Ascher Marcia. Explicit solutions of the one-dimensional heat equation for a composite wall. «Math. Comput.», 1960, **14**, № 72, 346—353 (англ.)

Рассматривается уравнение ($s = 1, 2$)

$$c_s \rho_s \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_s \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad a_{s-1} \leqslant x \leqslant a_s, \quad t > 0, \qquad (1)$$

(c_s, ρ_s и k_s в одной среде постоянны) с условием «сшивки» на границе $x = a_1$, $t > 0$ между двумя разными средами:

$$u_1 = u_2, \quad k_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 = k_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2. \qquad (2)$$

К (1) и (2) добавляются еще начальное ($u(x, 0) = C_1$, $a_0 < x < a_2$) и граничные ($u(a_0, t) = C_2$, $u(a_2, t) = C_3$, $t \geqslant 0$) условия. Здесь C_i — постоянные. Разбивая каждый из отрезков $a_s - a_{s-1}$ ($s = 1, 2$) на N_s равных частей Δx_s, автор для решения уравнения (1) в регулярных узлах использует обычное явное сеточное уравнение ($r_s = k_s/\rho_s c_s$):

$$T_{i,k+1} = \frac{r_s \Delta t}{\Delta x_s^2}(T_{i+1,\,k} - 2T_{i,k} + T_{i-1,\,k}) + T_{i,k}, \qquad (3)$$

а в узле $x = a_1$ использует явное уравнение вида

$$T_{i,\,k+1} = T_{i,k} + \frac{\left[(T_{i+1,\,k} - T_{i,k})\frac{k_2}{\Delta x_2} + (T_{i-1,\,k} - T_{i,k})\frac{k_1}{\Delta x_1}\right] 2\Delta t}{\Delta x_1 c_1 \rho_1 + \Delta x_2 c_2 \rho_2} \qquad (4)$$

(здесь узел $x_{i-1} \in (a_0, a_1)$, а $x_{i+1} \in (a_1, a_2)$). В случае $r_1 \neq r_2$ (даже при $\Delta x_1 = \Delta x_2$) возникает вопрос о целесообразном выборе временных шагов Δt_1 и Δt_2. Автор исследует сходимость, устойчивость, точность и вычислительное время для следующих трех методов выбора шагов Δt_1 и Δt_2 при использовании уравнений (3) и (4): 1) $\Delta t_1 = \Delta x_1^2/2r_1$, $\Delta t_2 = \Delta x_2^2/2r_2$; если $\Delta x_2 = \Delta x_1/\sqrt{R}$, где $R = r_1/r_2$ — целое число ($\sqrt{R}$ тоже предполагается целым числом), то $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t$. 2) Счет ведется также с одним и тем же шагом Δt, где $\Delta t = \min(\Delta t_1, \Delta t_2)$. 3) Счет ведется в соответствии с максимально возможными (в смысле обеспечения устойчивости) шагами $\Delta t_1 = \Delta x_1^2/2r_1$ и $\Delta t_2 = \Delta x_2^2/2r_2$ при выполнении небольшого числа дополнительных шагов в окрестности точки $x = a_1$, необходимых для вычисления значений $T_{i,\,k+1}$ в этой точке. На основании экспериментальной проверки автор пришел к выводу, что метод 1) наименее приемлем, так как он требует наибольшего вычислительного времени, уступает в точности методу 2) и вызывает осложнения при R нецелом. Методы 2) и 3) примерно эквивалентны (метод 2) более точен по сравнению с методом 3), но зато метод 3) требует меньше вычислительного времени).

В. К. Саульев

6 В204. Расчет паводковой волны. Isaacson Eugene. The calculation of flood waves. «Sympos. Numeric. Treatment Partial Different. Equations with Real Characteristics. Rome, 1959». Rome, s.a., 98—102 (англ.)

Описаны эксперименты по численному расчету скорости течения $v(x, t)$ и уровня воды $H(x, t)$ в реке. Одномерное уравнение движения и уравнение сохранения массы образуют нелинейную систему уравнений гиперболического типа с переменными коэффициентами, определяющую две указанные величины. Учитывается переменность поперечного сечения русла реки, а также наличие боковой приточности. В задаче заданы начальные значения v и H, а также величина расхода воды в верхнем створе. Расчет произведен для нескольких участков реальных рек и водохранилищ, а также для проектируемого искусственного водоема. Опыт численных расчетов показал, что при выборе способа разностной аппроксимации и величины шагов по x и t существенно принять во внимание быстрое изменение профиля русла реки вдоль потока.

С. Л. Белоусов

6 В205. К вопросу о прогнозе дефицита влажности. Мелешко В. П., Швец М. Е. «Тр. Гл. геофиз. обсерв.», 1960, вып. 114, 3—8

Выводится уравнение переноса дефицита влажности вида

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial x} + v\frac{\partial s}{\partial y} + \omega\frac{\partial s}{\partial p} = \frac{k}{p}\omega + \frac{\varepsilon}{c_p \rho}$$

(s — дефицит влажности). Для решения указанного уравнения применяется метод сеток. Изложен метод решения, для двумерного потока, реализованный на электронной вычислительной машине «Урал». Система алгебраических уравнений, которая получается в результате замены дифференциального уравнения разностным, решается итерационным методом Зейделя.

И.Ф. Шелихова

6 В206. Об оптимальной форме осесимметрического диффузора для сжимаемого изэнтропического газа. Krzywoblocki M. Z. On the optimum shape of an axially symmetric diffuser in compressible isentropic flow. «Istanbul tekn. üniv. bül., 1956, **9**, 103—112 (англ.; рез. турецк.)

Система дифференциальных уравнений

$$p_r = -\rho(uu_r + wu_z), \quad p_z = -\rho(uw_r + ww_z)$$

(уравнения сохранения момента)

$$r^{-1}\rho u + (\rho u)_r + (\rho w)_z = 0$$

(уравнение непрерывности),

$$\frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \gamma(\gamma - 1)^{-1} p\rho^{-1} = \gamma(\gamma - \quad p_0 \quad {}_0^{-1} = \text{const}$$

(уравнение сохранения энергии),

$$pp_0^{-1} = (\rho\rho_0^{-1})^{\gamma}$$

(закон изэнтропичности газа), записанная в цилиндрических полярных координатах (r, z) представляется в виде системы

$$\rho w_{zz} - p_z(p_r)^{-1}\rho_z w_r = p_z(p_r)^{-1}[r^{-1}(u\rho_r + u_r\rho) - \rho u r^{-2} + \rho_{rr} u + 2\rho_r u_r + \rho u_{rr} + w\rho_r + w_z\rho_r + w_{rz}\rho] - [r^{-1}(\rho_z u + u_z\rho) + \rho_{rz} + u_z\rho_r + u_{rz}\rho + \rho_z u_r + w\rho_{zz} + 2w_z\rho_z], \qquad (1)$$

$$r^{-1}\rho u + (\rho w)_z = -(\rho u)_r, \qquad (2)$$

$$u = -(r\rho)^{-1}\partial/\partial z\left[\int r\rho w dr + h(z)\right], \qquad (3)$$

которая решается методом последовательных приближений. При этом переменные w, u (компоненты скорости) и ρ (плотность) вычисляются соответственно из уравнений (1), (2) и (3).

6 В207. О решении смешанных задач для дифференциальных уравнений с частными производными при помощи разностных уравнений. Kreiss Heinz-Otto. Über die Lösung von Anfangsrandwertaufgaben für partielle Differentialgleichungen mit Hilfe von Differenzengleichungen. «Kgl. tekn. högskol. handl.», 1960, № 166, 61 S., ill. (нем.; рез. англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений m-го порядка с двумя вещественными независимыми переменными в области J ($0 \leqslant x \leqslant 1$; $0 \leqslant t \leqslant T$)

$$\partial u/\partial t = P(x, t, \partial/\partial x)\, u + F(x, t) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{[m/2]} \partial^{\nu}\left(A_{2\nu}\partial^{\nu} u\right) + \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{(m-1)/2}\left[\partial^{\nu}\left(A_{2\nu+1}\partial^{\nu+1} u\right) + \right.$$
$$\left. + \partial^{\nu+1}\left(A_{2\nu+1}\partial^{\nu} u\right)\right] + F(x, t), \qquad (1)$$

где $(\partial \equiv \partial/\partial x)$, $u(x, t)$ и $F(x, t)$ — вектор-функции в комплексном n-мерном пространстве, а $A_{\nu} = A_{\nu}(x, t)$ — матрицы. При этом матрица $A_m = \left(a_{ik}^{(m)}\right)$ треугольная, $\mathrm{Re}\left(a_{ii}^{(m)} - a_{kk}^{(m)}\right) \geqslant 0$ и в точках $x = 0$ и $x = 1$ неособенная. Все коэффициенты в системе (1) предполагаются принадлежащими классу $C^{m+1}(J)$. Граничные условия автор записывает в виде

$$\sum_{\nu=0}^{r_j} \alpha_{\nu j}(x, t)\, \partial^{\nu} u(x, t) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots; \quad x = 0, 1, \qquad (2)$$

где $\alpha_{\nu j}$ — матрицы, принадлежащие классу $C^1(0, T)$ (для разрешимости соответствующей системы разностных уравнений вводятся дальнейшие ограничения на матрицы $\alpha_{\nu j}$). По аналогии со своей более ранней работой (РЖМат 1960, 12134), в которой рассматривается задача Коши для системы (1), автор широко использует понятие полуограниченного в L_2 $(0, 1)$ оператора **P** (оператора P вместе с граничными условиями (2)). При этом автор называет оператор **P** полуограниченным, если существует такая постоянная K, что для всех $t \in (0, T)$ и всех $v(x) \in C^{\infty}(0, 1)$ и удовлетворяющих граничным условиям, имеет место

$$\mathrm{Re}\,(v, P(x, t, \partial/\partial x)\, v) \leqslant K \| v \|^2$$

(норма понимается в смысле равенства

$$(u, v) = \int_0^1 u^* v dx = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \overline{u_j} v_j dx, \quad \| u \|^2 = (u, u)).$$

Полуограниченность оператора **P** достаточна для построения устойчивых разностных аппроксимаций. Этим автор пользуется для построения устойчивых, а также строго устойчивых разностных аппроксимаций. При этом автор различает неустойчивость, получающуюся при аппроксимации дифференциальных уравнений, от неустойчивости, получающейся в результате аппроксимации граничных значений. Особо выделяется класс минимально полуограниченных операторов, т. е. полуограниченных операторов с минимальным числом граничных условий. Выводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы оператор **P** был минимально полуограничен. Автор показывает, что если оператор **P** минимально полуограничен, то существуют строго устойчивые разностные аппроксимации. Доказывается (при определенных условиях) сходимость решения строго устойчивой разностной аппроксимации к достаточно гладкому решению соответствующей смешанной задачи для системы дифференциальных уравнений. Понятию полуограниченности дифференциального оператора соответствует понятие строгой устойчивости разностного оператора. Для установления факта полуограниченности дифференциального оператора необходимы интегрирование по частям и оценка функции u и ее производных в граничных точках $x=0$ и $x=1$ через L_2-норму u и ее производные. Автор исследует разностные аналоги этих операций для установления факта строгой устойчивости разностных операторов. Отмечается, что нетрудно (особенно, если отсутствуют смешанные производные) получить строго устойчивые разностные аппроксимации для случая системы дифференциальных уравнений, зависящих от многих x-переменных. Кратко рассматривается случай, когда решение u в (1) не зависит от t (стационарный случай). В. К. Саульев

6 В208. Численное решение интегральных уравнений при помощи полиномов Чебышева. Elliott David. The numerical solution of integral equations using Chebyshev polynomials. «J. Austral. Math. Soc.», 1960, 1, № 3, 344—356 (англ.)

Для решения уравнения

$$f(x) = F(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\, f(y)\, dy \qquad (1)$$

искомая функция $f(x)$ представляется в виде

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n T_n(x).$$

где $T_n(x)$ — полиномы Чебышева, а $a_i\,(i = 0, 1, \ldots, N)$ — пока неопределенные коэффициенты. Известная функция $F(x)$, а также ядро $K(x, y)$ (сначала рассматривается случай вырожденного ядра) приближенно представляются в виде суммы первых $N + 1$ членов их разложений по полиномам $T_n(x)$, но уже с известными коэффициентами разложений. Если подставить эти разложения для известных функций и разложение (2) для искомого решения в данное интегральное уравнение (1), то получится система $N + 1$ линейных алгебраических уравнений для определения величин $a_0, a_1, \ldots, a_N$. Невырожденное ядро предлагается либо аппроксимировать вырожденным, либо применять метод коллокации в следующей форме. Записывают данное уравнение (1) в каких-нибудь $N + 1$ точках x_i $(i = 1, 2, \ldots, N + 1)$ из интервала (a, b) и для каждого значения x_i вычисляют разложение по полиномам Чебышева величины $K(x_i, y)$. Подстановка в полученные выражения формулы (2) приводит к системе $N+1$ линейных уравнений для определения величин $a_0, a_1, \ldots, a_N$. Для облегчения пользования описанным методом автор выводит формулы для произведения чебышевских разложений, для интеграла от чебышевского разложения и для интеграла от произведения чебышевских разложений. Например, если

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(x) \text{ и } g(x) = \frac{1}{2} b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n T_n(x),$$

то

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx = a_0\left(\frac{1}{2} b_0 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{2i}}{4i^2 - 1}\right) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[b_n - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{|n-2i|} + b_{n+2i}}{4i^2 - 1}\right].$$

Метод разложения по полиномам Чебышева сравнивается с методом представления решения в виде интерполяционного полинома Лагранжа, а также (в одном частном случае) с методом разложения по полиномам Лежандра. На числовых примерах отмечается значительное превосходство в точности метода, использующего полиномы Чебышева, над методом, использующим полиномы Лагранжа (при одной и той же степени полиномов). Высказываются некоторые соображения относительно выбора величины N. В. К. Саульев

6 В209. Решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода методом последовательных приближений. Хуан-Юй-жэнь. «Шусюэ цзиньчжань», 1957, 3, № 3, 424—426

Доказано, что если 1) $K(x, s)$ — симметричное ядро, принадлежащее $L_2(x, s)$, 2) уравнение

$$\int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x), \quad f(x) \in L_2(a, b) \qquad (1)$$

разрешимо и 3) $\lambda^2 < 2\lambda_1^2$ (λ_1 — наименьшее по абсолютному значению характеристическое число ядра $K(x, s)$), то решение уравнения (1) является пределом в среднем последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, определяемой при помощи соотношений

$$\varphi_n(x) = \nu_{n-1}(x) + \lambda\,[f(x) - f_{\nu_{n-1}}(x)],$$

$$\nu_{n-1}(x) = \varphi_{n-1}(x) - \lambda [f(x) - f_{\varphi_{n-1}}(x)],$$

где $\varphi_0(x) \in L_2(a, b)$ — произвольная функция и

$$f_{\nu_{n-1}}(x) = \int_a^b K(x, s)\, \nu_{n-1}(x)\, ds.$$

В. К. Саульев

6 В210. Приближенное решение некоторых линейных интегро-дифференциальных уравнений. Кривошеин Л. Е. «Bul. Inst. politehn. Jaşi», 1959, **5**, № 3-4, 39—50 (рез. франц., рум.).

Развивая свои прежние результаты (РЖМат, 1958, 7820, 9263), автор строит приближенные решения задачи

$$y^{(i)}(c) = a_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \qquad (1)$$

для уравнения

$$R[y, \lambda] \equiv L[y] - f(x) - \lambda \int_a^u \sum_0^m K_i(x, t)\, y^{(i)}(t)\, dt = 0, \qquad (2)$$

где

$$L[y] = y^{(n)}(x) + \sum_1^n a_i(x)\, y^{(n-i)}(x).$$

Если $u \equiv b$, $n > m$, $c = a$, то задача (1), (2) сводится к уравнению

$$y(x) = \sum_0^{n-1} a_i \frac{(x-a)^i}{i!} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} T[y]\, dt,$$

$$T[y] = -\sum_1^n a_i(x)\, y^{(n-i)}(x) + \lambda \int_a^b \sum_0^m K_i(x, t)\, y^{(i)}(t)\, dt,$$

для которого строится процесс Чаплыгина, дается оценка погрешности на k-ом шагу и критерий выбора числа шагов k, обеспечивающего приближение к искомому решению с наперед заданной точностью ε. Процесс Чаплыгина распространяется на случай $u \equiv x$, $n > m$. Для исходной задачи (1), (2) построен также процесс Чаплыгина, основанный на так называемых разрешающих системах, что удобно, например, в случае $c \neq a$. В заключение построен восходящий от Ю. Д. Соколова (РЖМат, 1957, 8252) процесс последовательных приближений, включающий функциональные поправки. Изложение иллюстрировано примерами. Н. Я. Лященко

6 В211. Различные варианты метода последовательных приближений и метода возмущений. Свирский И. В. «Изв. Казанск. фил. АН СССР. Сер. физ.-матем. и техн. н.», 1958, вып. 12, 29—41

Излагаются три варианта метода последовательных приближений для решения уравнения вида $Ax + Bx = P$, где A — линейный оператор, для которого уравнение $Ax = P$ решается достаточно легко, а B — нелинейный оператор, линейная часть которого может быть отличной от нуля. Первый, обычный вариант метода последовательных приближений состоит в следующем. В качестве первого приближения x_1 к решению задачи принимается решение линейного уравнения $Ax_1 = P$. Второе приближение x_2 определяется по формуле $x_2 = x_1 + \delta_2$, где δ_2 — решение уравнения $A\delta_2 = P - Ax_1 - Bx_1$, и т. д. Второй вариант метода последовательных приближений излагается применительно к уравнению $Ax + Bx = pP$, к решению которого сводится, например, задача определения перемещений сферической оболочки-сегмента, защемленной по краям, при действии на нее нагрузки pP, где p — числовой параметр. При этом первое приближение определяется из уравнения $Ax_1(p_1) = p_1 P$, где p_1 — произвольно выбранное значение параметра p. Второе приближение берется в виде $x_2(p_1) = x_1(p_1) + \delta_2(p_1)$, где $\delta_2(p_1)$ есть решение уравнения

$$A\delta_2(p_1) = p_2 P - Ax_1(p_1) - Bx_1(p_1),$$

причем число p_2 определяется из условия равенства поперечных прогибов центра оболочки в первом и втором приближениях. Аналогично определяются следующие приближения. Задаваясь рядом последовательных значений p_1, можно получить соответствующие друг другу значения x и p, построить графики их зависимостей. Отмечается, что сходимость второго метода значительно более быстрая, чем первого. Предлагаемый автором третий метод последовательных приближений отличается от второго тем, что при его применении на каждом этапе приближений величина p корректируется так, чтобы в двух последовательных приближениях оставались одинаковыми не поперечные прогибы центра оболочки, а обобщенные перемещения. Эффективность изложенных методов проверяется на решении граничной задачи

$$d^2y/dx^2 - y = p, \quad y(1) = y(-1) = 0.$$

Третий метод оказывается наиболее эффективным при одном и том же числе приближений. Отмечается, что изложенные методы можно применять не только к решению уравнений теории оболочек, но и к другим видам нелинейных уравнений. Рассматривается также применение метода возмущений, соответствующего третьему методу последовательных приближений, к решению уравнения $Ax + \mu Bx = pP$, где μ — малый параметр.

Д. Ф. Давиденко

6 В212. Об одном итеративном процессе. Смирнов С. А. «Тр. Моск. ин-та инж. геод., аэрофотосъемки и картогр.», 1960, вып. 41, 75—80

Рассматривается связь между системой линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + b_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

и системой

$$\sum_{i-1}^n A_{si} \lambda_i + b_s = 0, \quad s = 1, \ldots, n, \qquad (2)$$

где $A_{sl} = \sum_{k-1}^n a_{sk} a_{lk}$. Первая система решается следующим образом. Из начала координат опускается перпендикуляр на гиперплоскость, определяемую первым уравнением системы (1). Из полученной точки (основания перпендикуляра) опускается перпендикуляр на гиперплоскость, определяемую вторым уравнением, и т. д. Это соответствует решению системы (2) с помощью итерационного процесса

$$\lambda_s^{(n)} = -\frac{b_s + \sum_{i\ 1}^{s-1} A_{si} \lambda_i^{(n)} + \sum_{i=s+1}^n A_{si} \lambda_i^{(n-1)}}{A_{ss}};$$

этот процесс является одним из вариантов метода Зейделя. Исходя из указанной связи, формулируются условия сходимости метода Зейделя: $A_{is} = A_{si}$, $A_{ss} > 0$, $|A_{ij}| < \sqrt{A_{ii} A_{jj}}$. Следует потребовать также, чтобы матрица системы (2) была положительно определенной. Сходимость процесса, применяющегося для решения системы (1), доказывается на основе принципа сжатых отображений. Имеется числовой пример.

В. Л. Загускин

6 В213. Влияние ошибок округлений на точность решения систем линейных уравнений. Мохов Ю. В. «Тр. Моск. ин-та инж. геод., аэрофотосъемки и картогр.», 1960, вып. 42, 111—121

Выясняется степень влияния суммарных ошибок округления, обусловленных ошибками предыдущих вычислений, на точность решения систем линейных уравнений. Изучается процесс накопления собственно ошибок округлений по мере возрастания числа арифметических действий и изменение суммы элементарных ошибок округлений по мере увеличения их числа. Выясняются пределы, в которых колеблется сумма элементарных ошибок округлений около своего среднего значения, т. е. нуля. Выведены формулы вида

$$\Delta_s = [k\cdot\varepsilon]_1^s \text{ и } \Delta_s = \max = k_{\max}\cdot[\varepsilon]_1^s$$

(где ε — элементарная ошибка округления, k — коэффициент, характеризующий качество решаемой системы), математически выражающие совместное влияние качества решаемой системы и собственно ошибок округлений на точность решения. Показано, что ни качество системы, ни влияние собственно ошибок округлений не зависят от числа неизвестных решаемой системы и что влияние собственно ошибок округлений можно исключить, взяв три-четыре запасных знака, независимо от того, как велика решаемая система. Приводится график, на котором показана кривая суммы элементарных ошибок округлений и кривая предельной ошибки суммы. Изложенное поясняется конкретными примерами. И. Ф. Шелихова

6 В214. Исследование сходимости последовательных приближений. Смирнов С. А. «Тр. Моск. ин-та инж. геод., аэрофотосъемки и картогр.», 1960, вып. 42, 137—144

Доказана теорема: Если система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + b_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

имеет единственное решение, то итерационный процесс

$$X_s^{(m)} = -\frac{b_s + \sum_{i=1}^{s-1} A_{si}X_i^{(m)} + \sum_{i=s+1}^{n} A_{si}X_i^{(m-1)}}{A_{ss}},$$

где $A_{si} = \sum_{k=1}^{n} a_{sk}a_{ik}$, сходится и решение системы (1) определяется по формуле $x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}X_i$. При доказательстве этой теоремы устанавливается существование предела $\lim_{m\to\infty} X_s^{(m)} = X_s$.

6 В215. О методах решения линейных алгебраических уравнений. Stojaković M. On methods for solutions of linear algebraic equations». Univ. Beograd. Zb. Mašin. Fak. 1954—55, 19—27 (сербо-хорв.; рез. англ.)

Сначала дается обзор различных методов решения линейной системы $\mathbf{a}_i\mathbf{x} = b_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Упоминаются правило Крамера, метод исключения Гаусса и метод Банахевича. Затем он предлагает написать $\mathbf{x} = \mathbf{y} + z_1\mathbf{u}_1 + z_2\mathbf{u}_2 + \ldots + z_{n-k}\mathbf{u}_{n-k}$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$), где $\mathbf{y}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-k}$ — неопределенные независимые векторы, а $z_1, z_2, \ldots, z_{n-k}$ — неизвестные числа. В качестве $\mathbf{y}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-k}$ берется система векторов, удовлетворяющая уравнениям $\mathbf{a}_i\mathbf{y} = b_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) и $\mathbf{a}_i\mathbf{u}_j = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n-k$). При этом первые k уравнений системы

$$\mathbf{a}_i\mathbf{y} + z_i\mathbf{a}_i\mathbf{u}_1 + \ldots + z_{n-k}\mathbf{a}_i\mathbf{u}_{n-k} = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

тождественно удовлетворяются для каждого z_i, а остающиеся $n-k$ уравнений могут быть использованы для определения $z_1, z_2, \ldots, z_{n-k}$. Таким путем выбор различных значений $k, \mathbf{y}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-k}$ приводит к различным решениям линейной системы (при $k = 1 - k$ — к методу исключения Гаусса, при $k = n-1$ — к недавно опубликованной формуле $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \frac{b_n - \mathbf{a}_n\mathbf{y}}{\mathbf{a}_n\mathbf{u}}\mathbf{u}$) P. S. Dwyer

Перевод из Math. Revs, 1958, **19**, № 6.

6 В216. О теореме минимакса и некоторых ее применениях. Akaike Hirotugu, Saigusa Yaeko. On a min-max theorem and some of its applications. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1960, **12**, № 1, 1—5 (англ.)

Пусть A — квадратичная матрица порядка n с элементами a_{ij}, удовлетворяющими неравенству $a_{ij} \geqslant a_{ij+1}$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$), а $B = \{b_{ij}\}$ — одна из $n!$ матриц, полученных при помощи всевозможных перестановок строк матрицы A. Авторы описывают систематический метод построения на основе матрицы A той матрицы B, для которой величина $\max_i b_{ii}$ минимальна. Эта теория применяется к численному решению системы линейных алгебраических уравнений

$$(E - D)x = b, \qquad (1)$$

где E — единичная матрица, $D = \{d_{ij}\}$ и $\sum_{j=1}^{n} d_{ij} < 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) при помощи метода Зейделя

$$x_i^{(k+1)} = b_i + \sum_{j-1}^{i-1} d_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j^{(k)}. \qquad (2)$$

Скорость сходимости $x^{(k)}$ к решению системы (1) определяется величиной

$$r(D) = \max_i\left(\frac{\sum_{j-i}^{n} |\, d_{ij}\,|}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} |\, d_{ij}\,|}\right) \qquad (3)$$

(чем меньше $r(D)$, тем быстрее сходимость метода (2)). При этом минимизация величины $r(D)$ может быть осуществлена соответствующей перестановкой строк матрицей A с элементами a_{ij}, определяемыми по формуле

$$a_{ij} = \frac{\sum_{k=j}^{n} |\, d_{ik}\,|}{1 - \sum_{k-1}^{j-1} |\, d_{ik}\,|}.$$

В. К. Саульев

6 В217. О применении метода вариации параметра к вычислению собственных чисел и собственных векторов матриц. Давиденко Д. Ф. «Докл. АН СССР», 1960, **131**, №5, 1007—1010

Изложен метод вычисления собственных чисел $p_i(\lambda)$ квадратной матрицы n-го порядка $A(\lambda) = \| a_{kj}(\lambda) \|$ и соответствующих им собственных векторов $X_i(\lambda)$. $p_i(\lambda) = p_i^{(0)}$ при $\lambda = \lambda_0$; λ — параметр ($\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$). Вводятся обозначения: $B(\lambda, p_i) = \| b_{kj}(\lambda, p_i) \| = \| A(\lambda) - p_iE \|$, E — единичная матрица, $C(\lambda, p_i)$ — союзная матрица для матрицы $B(\lambda, p_i)$. Матрицу $B(\lambda, p_i)$ можно представить в виде

$$B(\lambda, p_i) = \left\| \begin{matrix} P(\lambda, p_i) & u(\lambda, p_i) \\ v(\lambda, p_i) & b_{nn}(\lambda, p_i) \end{matrix} \right\|,$$

где $P(\lambda, p_i)$ — матрица $(n-1)$-го порядка с отличным от нуля в рассматриваемой области определителем $\overline{\Delta}(\lambda, p_i)$. Справедливо соотношение: $C(\lambda, p_i) = \overline{\Delta}(\lambda, p_i) \times C^*(\lambda, p_i)$. Предполагается, что 1) все $a_{kj}(\lambda)$ определены и непрерывны вместе со своими производными для $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$; 2) след матрицы

$$\mathrm{Sp}\left[C(\lambda, p_i)\frac{\partial B(\lambda, p_i)}{\partial p_i}\right] \neq 0$$

в точке $(\lambda_0, p_i^{(0)})$. В этих предположениях доказывается, что вычисление $p_i(\lambda)$ для $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$ сводится к численному интегрированию системы уравнений

$$\frac{dp_i}{d\lambda} = -\frac{\mathrm{Sp}\left[C^*(\lambda, p_i)\frac{\partial B(\lambda, p_i)}{\partial \lambda}\right]}{\mathrm{Sp}\left[C^*(\lambda, p_i)\frac{\partial B(\lambda, p_i)}{\partial p_i}\right]},$$

$$\frac{dP^{-1}(\lambda, p_i)}{d\lambda} = -P^{-1}(\lambda, p_i)\frac{dP(\lambda, p_i)}{d\lambda}P^{-1}(\lambda, p_i)$$

с начальными условиями $p_i(\lambda) = p_i^{(0)}$, $P^{-1}(\lambda, p_i) = P_0^{-1}$ при $\lambda = \lambda_0$. Указан способ нахождения компонент вектора $X_i(\lambda)$. Рассмотрен числовой пример.

Ю. М. Барабошкин

6 В218. Об одном итерационном методе диагонализации симметрических матриц. Fiedler Miroslav, Pták Vlastimil. O jedné iterační metodé diagonalisace symetrických matic. «Časop. pěstov. mat.», 1960, 85, № 1, 18—36 (чешск.; рез. русск., англ.)

Для каждой эрмитово-симметрической матрицы A построена матрица $\varphi(A)$ такая, что при определенных предположениях последовательность матриц $A_1\varphi(A)$, $\varphi[\varphi(A)]$,... стремится к матрице L, унитарно-эквивалентной матрице A, для которой обобщенная мера диагональности равна нулю, т. е. в L все элементы, за исключением элементов главной диагонали и некоторых элементов в ее близости, равны нулю. Понятие обобщенной меры диагональности комплексной матрицы A определяется так: Пусть n—натуральное число и $k_0, k_1, \ldots, k_p$—такие целые числа, что $0=k_0<k_1<\ldots<k_p=n$. Для каждой квадратной матрицы A порядка n с элементами a_{rs} этими числами определено разбиение в клетки A_{ij}: A_{ij} есть матрица с элементами a_{rs}, для которых $k_{i-1}<r\leqslant k_i$, $k_{j-1}<s\leqslant k_j$. Если в матрице A сохраним диагональные клетки A_{ii} и все остальные заменим нулевыми матрицами надлежащих размерностей, то мы обнаружим клеточно-диагональную матрицу, которую обозначим через $D(A)$. Положим $Q(A)=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2$, $Q^*(A)=Q[A-D(A)]$; тогда $Q^*(A)$—обобщенная мера диагональности матрицы A.

Пусть A—эрмитово-симметрическая матрица. К каждой паре собственных значений, принадлежащих двум различным клеткам A_{ii}, построим абсолютное значение их разности. Между этими числами найдется наименьшее, которое мы обозначим через $c(A)$. Предположим $c(A)>0$, $\sqrt{Q^*(A)}/c(A)<1$; тогда существует эрмитова кососимметрическая матрица S такая, что $D(A)S-SD(A)=A-D(A)$. Если E—единичная матрица порядка n, то матрица $\sqrt{E+S^2}$ существует. Положим $U=S+\sqrt{E+S^2}$; тогда U—унитарная матрица. Мы определим $\varphi(A)=UAU^*$, где U^*—эрмитово-сопряженная матрица с U. Доказывается, что имеется такое число ξ ($\approx 0{,}47172$), что из неравенства $\sqrt{Q^*(A)}/c(A)\leqslant\xi$ следует существование матрицы $\varphi(A)$ и справедливость соотношений $c[\varphi(A)]>0$, $\sqrt{Q^*[\varphi(A)]}/c[\varphi(A)]\leqslant\xi$. Отсюда вытекает существование унитарных матриц $U=U_1$, $U_2, U_3, \ldots$ таких, что, положив $\varphi^0(A)=A$, $\varphi^k(A)=U_k\varphi^{k-1}(A)U_k^*$, мы получим последовательность $\{\varphi^k(A)\}$, которая стремится к матрице L, унитарно-эквивалентной матрице A, для которой $Q^*(L)=0$. Матрица $V=U_1^*U_2^*U_3^*\ldots$ унитарная, и $L=V^*AV$. Для обобщенной меры диагональности матрицы $\varphi^k(A)$ справедливо соотношение $Q^*[\varphi^k(A)]\leqslant Q^*(A)\rho^k\mu^{2^k-1}$; где $\mu=\sqrt{Q^*(A)}/c(A)\xi$ и ρ—определенное число ($\approx 0{,}24051$). Наиболее важным является случай, когда для чисел k_i справедливо $p=n$ и $k_i=i$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$. Тогда равенство $Q^*(L)=0$ выражает, что матрица L диагональна.

M. Novotný

6 В219. Интервалы для характеристических корней эрмитовой матрицы. Brauer Alfred, Mewborn A. C. Intervals for the characteristic roots of an Hermitian matrix. «J. Elisha Mitchel Scient. Soc.», 1957, **73**, № 2, 247—254 (англ.)

Доказаны теоремы: 1) Если G_ν—верхняя граница для ν-го характеристического числа эрмитовой матрицы A, то G_ν является также верхней границей для ν-го характеристического числа любой эрмитовой матрицы B, для которой матрица A есть главный минор. 2) Если L_ν—нижняя граница для ν-го характеристического числа любой эрмитовой матрицы A порядка n, то L_ν является также нижней границей для $(\nu+\tau)$-го характеристического числа любой эрмитовой матрицы B порядка $\nu+\tau$, которая содержит матрицу A в качестве главного минора. Доказательство этих теорем основано на теореме о разделении характеристических корней эрмитовой матрицы A, впервые доказанной Коши: между двумя последовательными характеристическими корнями матрицы A находится корень каждого из главных миноров порядка $n-1$ матрицы A. Приведено несколько числовых примеров. Библ. 12 назв.

В. К. Саульев

6 В220. Замечание к предыдущей статье. Goldstine H. H. Footnote to a recent paper. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1960, 7, № 1, 78—79 (англ.)

В статье (РЖМат, 1960, 7006) автора, Муррея и Нёймана (написанной первыми двумя авторами после смерти Нёймана с использованием его неопубликованных результатов) изобретение метода триангуляции для разыскания собственных чисел матриц произвольного вида ошибочно приписано Нёйману. Приводится отрывок из письма Гринстадта (Greenstadt), который указывает, что метод изобретен им и описывает в живой форме свою беседу с Нёйманом по вопросу о сходимости метода.

М. К. Гавурин

6 В221. Использование метода наименьших квадратов для интерпретации данных, полученных из сейсмической съемки. Scheidegger A. E., Willmore P. L. The use of a least squares method for the interpretation of data from seismic surveys (with comments by C. H. Dix). «Geophysics», 1957, 22, 9—22 (англ.)

Для решения системы линейных алгебраических уравнений применяется метод квадратных корней с применением краковянов Банахевича.

G. F. Forsythe

Из Math. Revs, 1958, **19**, № 6.

6 В222. Об одном обобщении итерации Ньютона. Самко Г. П. «Уч. зап. Ростовск.-н/Д. гос. пед. ин-т», 1960, вып. 5 (42), 3—10

Рассматривается уравнение

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

с целочисленными коэффициентами и иррациональным корнем $\zeta_0>1$. Предлагаются итерации

$$\zeta_2=I_{\rho\delta}(\zeta_1)\equiv\frac{(a\rho+b\delta)\zeta_1^2+2c\delta\zeta_1-c\rho}{-a\delta\zeta_1^2+2a\rho\zeta_1+b\rho+c\delta}.$$

При $\delta=0$ получаются итерации по методу Ньютона: $\zeta_2=I_{\rho 0}(\zeta_1)\equiv I(\zeta_1)$. Изучаются некоторые свойства обобщенных итераций. Доказывается следующая теорема: Пусть ζ_0 разлагается в непрерывную периодическую дробь $(a_0, b_1, b_2, \ldots b_{n-1}, b_n)$, причем период $n\geqslant 2$. Обозначим через p/q подходящую дробь, оканчивающуюся неполным частным b_{n-1} в k-ом периоде, а через P/Q—подходящую дробь, оканчивающуюся тем же неполным частным в $2k$-ом периоде. Тогда $\frac{P}{Q}=I\left(\frac{p}{q}\right)$. Рассматриваются также некоторые вопросы, касающиеся приближения значения квадратного корня из целого числа подходящими дробями.

В. Л. Загускин

6 В223. Сокращение количества итераций в методе Бернулли и рекуррентные соотношения. Gnanadoss Adaikalam A. Contracting Bernoulli's iteration and recurrence relations. «Math. Gaz.», 1960, **44**, № 349, 210—211 (англ.)

На примере уравнения $x^3-x-1=0$ показано, как с помощью нескольких преобразований можно выразить

$$x^{48}=170625x^2+226030x+128801, \qquad (1)$$

$$x^{49}=226030x^2+299426x+170625. \qquad (2)$$

Полученные выражения можно применить для вычисления наибольшего по модулю корня: взяв $\xi_0=1$, $\xi_1=1{,}3$ и $\xi_2=1{,}69$ и подставив их в выражения (1) и (2), получим $\xi=\frac{\xi_{49}}{\xi_{48}}=1{,}324717973$. Это требует значительно

меньшего количества операций, чем непосредственное вычисление ξ_{48} и ξ_{49} по методу Бернулли.

В. Л. Загускин

6 В224. Извлечение кубического корня методом ушестеренных квадратов. Mastandrea Pasquale. Estrazione di radice cubica col metodo dei sestupli quadrati. «Archimede», 1960, **12**, № 4—5, 239—243 (итал.)

Выводятся формулы

$$a^3 - a = 6[(a-1)^2 + (a-3)^2 + \dots]$$

и

$$a^3 - a = 6\left[\frac{a(a-1)}{2} + (a-2)^2 + (a-4)^2 + \dots\right]$$

и показывается их применение для вычисления последовательных десятичных знаков кубического корня.

В. Л. Загускин

6 В225. Решение алгебраических уравнений 3—5 степеней с действительными коэффициентами. Schmidtmayer Josef. Výhodné řešení algebraických rovnic. 3. až 5. stupně (s reálnými koeficienty). «Pokroky mat., fys. a astron.», 1958, **3**, № 6, 659—671 (чешск.)

Изложен графо-численный метод решения алгебраических уравнений 3—5-й степени. Уравнения третьей степени $x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0 = 0$ сводится путем подстановки $x = y - \frac{1}{3}d_2$ к уравнению $y^3 + h_1y + h_0 = 0$. Действительный корень этого уравнения устанавливается графически. Два остальных корня y_1, y_2 получаются как корни квадратного уравнения $y^2 + p_1y + p_0 = 0$, где $p_1 = y_1$, $p_0 = h_1 + y_1^2$. Уравнение четвертой степени $x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0$ сводится подстановкой $x = y - \frac{b_3}{4}$ к уравнению $y^4 + c_2y^2 + c_1y + c_0 = 0$. Корни этого уравнения получаются как корни двух квадратных уравнений $y^2 + p_1y + p_0 = 0$, $y^2 + q_1y + q_0 = 0$. При этом имеют место следующие равенства:

$$p_0 = \frac{1}{2}\left[(c_2 + p_1^2) - \frac{c_1}{p_1}\right], \quad q_0 = \frac{1}{2}\left[(c_2 + p_1^2) + \frac{c_1}{p_1}\right],$$

$$q_1 = -p_1, \; p_1^2 = v_1 - \frac{2}{3}c_2,$$

где v_1 — максимальный действительный корень кубического уравнения $v^3 + h_1v + h_0 = 0$, $h_1 = -4c_0 - \frac{1}{3}c_2^2$, $h_0 = -c_1^2 + \frac{8}{3}c_0 \quad c_2 - \frac{2}{27}c_2^2$. Корень v_1 находится графически. В случае уравнения пятой степени $x^5 + a_1x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ устанавливается один из действительных корней x_1 графически и остальные корни получаются как корни уравнения $x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0$, где $b_3 = a_4 + x_1$, $b_2 = a_3 + b_3x_1$, $b_1 = a_2 + b_2x_1$, $b_0 = a_1 + b_1x_1$.

M. Sisler

6 В226. Решение уравнений третьей степени способом итераций. Coppel William Andrew. The solution of cubic equations by iteration. «Z. angew. Math. und Phys.», 1958, **9a**, № 4, 380—383 (англ.; рез. итал.)

Уравнение с действительными коэффициентами

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

решается по способу итераций: $x_{k+1} = f(x_k)$, где $f(x) = -c/(x^2 + ax + b)$. Автор показывает, что при соблюдении условий

$$b > a^2/4; \quad c < 0; \quad c - \frac{ab}{2} + \frac{a^3}{8} > 0 \qquad (2)$$

(это равносильно требованию, чтобы вещественная часть каждого из корней уравнения (1) была меньше, чем $-a/2$) при любом $x_0 \in (-\infty, -a/2)$ итерационный процесс сходится монотонно к корню уравнения (1), причем если уравнение не имеет мнимых корней, то процесс сходится к наименьшему или к наибольшему из корней в зависимости от того, будет x_0 меньше или больше среднего корня уравнения. Любое уравнение третьей степени подстановкой $x = y - d$ может быть сведено к уравнению, в котором будут выполняться условия (2).

А. П. Доморяд

6 В227. Итеративный метод для нахождения корня n-й степени из числа. Gould H. W. An iterative approximation for finding the n-th root of a number. «Math. Mag.», 1959, **33**, № 2, 61—69 (англ.)

Для вычисления $\sqrt{N}$ указывается итерационный процесс $x_{k+1} = (x_k + N)/(x_k + 1)$. При $N > 1$ процесс сходится, если $1 < x_1 < \sqrt{N}$ и $\varepsilon = \sqrt{N} - x_1 < 2$. Скорость сходимости не хуже, чем у некоторой геометрической прогрессии. Для вычисления $\sqrt[n]{N}$ предлагается процесс

$$x_{k+1} = \frac{x_k^{n-1} + x_k^{n-2} + \dots + x_k + N}{x_k^{n-1} + x_k^{n-2} + \dots + x_k + 1},$$

который сходится (со скоростью геометрической прогрессии), если начальное приближение x_1 достаточно близко к $\sqrt[n]{N}$. В частности, для $n = 3$ выводится оценка:

$$\varepsilon = |\sqrt[3]{N} - x_1| < \frac{3}{2}\sqrt[3]{N} - 1 - \sqrt{\frac{5}{4}(\sqrt[3]{N})^2 - \sqrt[3]{N} - 1}.$$

Устанавливается связь метода с методом линейной интерполяции. Изложенный метод представляет собой тот частный случай метода линейной интерполяции, который получается, если левый конец отрезка интерполяции (на котором функция $N - x^n$ заменяется линейной) зафиксировать на $x = 1$, а заменять (независимо от знака функции в полученной точке) все время правый конец.

В. Л. Загускин

6 В228. Критерий устойчивости и его применение к вычислению корней многочлена. Aparo E. L. A stability criterion and its application to the computation of the zeros of a polynomial. «Sympos. Questions Numer. Analysis, Rome, 1958». Rome, s. a., 44—47 (англ.)

Для вычисления комплексных корней многочлена $f(z)$ предлагается применить критерий Рауса — Гурвица. Многочлен называется многочленом Гурвица (соответственно почти многочленом Гурвица), если для любого корня $z = x + iy$ этого многочлена $x < 0$ ($x \leqslant 0$). Рассматривается частный случай применения критерия Рауса — Гурвица для случая, когда многочлен является почти многочленом Гурвица. Метод состоит в том, что путем подбора и проверки с помощью критерия Рауса — Гурвица определяются такие действительные числа h_1 и h_2, чтобы $f(x + h_1)$ являлся многочленом Гурвица, а $f(x + h_2)$ — нет. Затем берется $h = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$ и им заменяется одно из чисел h_1, h_2 так, чтобы оставшаяся пара обладала первоначальным свойством. Процесс повторяется до тех пор, пока не удастся определить такое h, чтобы $f(x + h)$ был почти многочленом Гурвица. Тем самым определяется действительная часть корня. Указывается, как после этого применить тот же метод для нахождения мнимой части корня.

В. Л. Загускин

6 В229. Замечание о решении алгебраического уравнения четвертого порядка. Salzer Herbert E. A note the solution of quartic equations», Math. Comput.», 1960, **14**, № 71, 279—281 (англ.)

Рассматривается алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами

$$X^4 + AX^3 + BX^2 + CX + D = 0. \qquad (1)$$

Для нахождения корней уравнения (1) решается «резольвентное кубическое уравнение»

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = 0, \qquad (2)$$

где $a=1$, $b=-B$, $c=AC-4D$, $d=D(4B-A^2)-C^2$. Даются формулы для нахождения корней уравнения (1) для случаев, когда выражение $m=\sqrt{\frac{1}{4}A^2-B+X_1}$ является действительным и мнимым; X_1 — действительный корень уравнения (2). Рассматривается числовой пример. М. А. Алексидзе

6 В230. Численная локализация корней. Masaitis Č. Numerical location of zeros. Ordnance Computer Research Report, Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground, Md. 1957, **4**, № 1, 26—28 (англ.)

Рассматривается решение уравнения $f(x)=0$ методом поочередного использования линейной интерполяции и деления пополам. Это решение сравнивается с решением при помощи простых итераций метода деления пополам.

Перевод из Math. Revs, 1958, **19**, № 6.

6 В231. Обобщение способа Ньютона для приближенного решения уравнений. Данко П. Е. «Тр. Ростовск.— н/Д. ин-та инж. ж.-д. трансп.», 1959, вып. 28, 19—30

Пусть вещественный корень X уравнения $f(x)=0$ изолирован в интервале (α, β), в котором функции $f^{(s)}(x)$ $(s=0, \ldots, n+1)$ непрерывны, и $X\approx a$, причем $a\in(\alpha, \beta)$. Автор показывает, что, выбрав в уравнении кривой

$$y=\varphi_n(x)=\frac{x-a_n}{A_0+A_1(x-a)+\ldots+A_{n+1}(x-a)^{n-1}}$$

параметры $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, a_n$ так, чтобы удовлетворялись условия $\varphi_n^{(k)}(a)=f^{(k)}(a)$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$, и положив $X\approx a_n$, придем к известному обобщению способа Ньютона $X\approx a_n=a-b_0(D_{n-1}/D_n)$, где

$$D_k=\begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{k-1} & b_{k-2} & b_{k-3} & \ldots & b_1 & b_0 \\ b_k & b_{k-1} & b_{k-2} & \ldots & b_2 & b_1 \end{vmatrix}$$

и

$$b_s=\frac{f^{(s)}(a)}{s!}\quad (s=0, 1, 2, \ldots, n).$$

Чтобы при $n=2$ с осью Ox пересекалась та ветвь гиперболы $y=(x-a_2)/(A_0+A_1(x-a))$, которая проходит через точку $(a, f(a))$, должно выполняться условие $b_1^2-b_0b_2>0$. Для обобщения способа Ньютона решения системы уравнений

$$\begin{aligned} f(x, y)&=0 \\ \varphi(x, y)&=0 \end{aligned} \qquad (1)$$

автор использует прием, указанный Чебышевым для вычисления корня функции $F(x)$, основанный на разложении в ряд Тейлора функции, обратной $F(x)$. Пусть (x_0, y_0) — первое приближение к решению (X, Y) системы (1), причем точки (x_0, y_0) и (X, Y) лежат в прямоугольнике $a_1<x<b_1$; $a_2<y<b_2$, в котором функции f и φ непрерывны вместе с частными производными до $n+1$-го порядка включительно, якобиан $\begin{vmatrix} f'_x(x, y) & f'_y(x, y) \\ \varphi'_x(x, y) & \varphi'_y(x, y) \end{vmatrix}$ отличен от нуля и каждый из определителей $\begin{vmatrix} f_0 & f'_y(x, y) \\ \varphi_0 & \varphi'_y(x, y) \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} f'_x(x, y) & f_0 \\ \varphi'_x(x, y) & \varphi_0 \end{vmatrix}$ сохраняет знак. Тогда из системы уравнений $f(x, y)=zf(x_0, y_0)$, $\varphi(x, y)=z\varphi(x_0, y_0)$ x и y определяются, как однозначные, монотонные и непрерывные функции z, причем $x(0)=X$, $y(0)=Y$; $x(1)=x_0$, $y(1)=y_0$. Разлагая $x(z)$ и $y(z)$ по степеням $z-1$, при $z=0$ получим

$$X=x_0-x'(1)+\frac{x''(1)}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{(n)}(1)}{n!}+\frac{(-1)^{n+1}x^{(n+1)}(\theta_1)}{(n+1)!};$$

$$Y=y_0-y'(1)+\frac{y''(1)}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{y^{(n)}(1)}{n!}+\frac{(-1)^{n+1}y^{(n+1)}(\theta_2)}{(n+1)!}.$$

Автор дает также в развернутом виде границы погрешностей приближенных значений корней системы (1), вычисленных по способу Ньютона. А. П. Доморяд

6 В232. Асимптотические разложения для вещественных корней некоторых трансцендентных уравнений. Риекстыньш Э. «Zinātn. raksti. Latv. univ., Уч. зап. Латв. ун-т», 1959, **28**, 67—86 (рез. лат.)

Рассматривается уравнение

$$\sin(x+\omega)f_1(x)+\cos(x+\omega)f_2(x)=f_3(x), \qquad (1)$$

где функции $f_i(x)$ вместе со своими производными допускают разложение в асимптотические ряды вида $\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{-\alpha_k}$ $(a_0\neq 0,\ \alpha_k<\alpha_{k+1},\ \alpha_k\to\infty)$. Это означает, что $f_i(x)-\sum_{k=0}^{n}a_kx^{-\alpha_k}=o(x^{-\alpha_n})$ для значений x из некоторого неограниченного справа множества. При некоторых условиях, накладываемых на коэффициенты асимптотических рядов, даются асимптотические формулы, которые могут служить для вычисления достаточно больших корней уравнения (1). Указываются условия, при которых эти корни существуют. Случай $f_3(x)\equiv 0$ известен в литературе, однако автор считает, что предлагаемый метод имеет преимущество и в данном случае. В качестве приложения рассматривается задача Штурма — Лиувилля для уравнения

$$v''+[\lambda^2x^{\alpha}+g(x)]v=0$$

при $v(0)=v(r)=0$, $\alpha=-1, 0, 1$. Даются асимптотические формулы для собственных чисел λ_n и соответствующих собственных функций $v_n(x)$. В. Л. Загускин

6 В233. Заметка о решении уравнения Кеплера. Вентцель М. К. «Астрон. ж.», 1958, **35**, № 4, 672—673 (рез. англ.)

Предлагается способ решения уравнения Кеплера $E=M+e\sin E$, удобный для вычисления на арифмометре или счетной машине. Формула

$$E=M+e''\sin E_0\pm\frac{e''\lambda}{1\mp e''\lambda}(M-M_0)$$

является рабочей формулой способа. Резюме автора

6 В234. Альтернативные формулы для обратного интерполирования с двухкратными и трехкратными узлами. Salzer Herbert E. Alternative formulas for osculatory and hyperosculatory inverse interpolation. «Math. Comput.», 1960, **14**, № 71, 257—261 (англ.)

Интерполирование функции $f(x)$ по таблице значений

$$[x_i, f(x_i), f'(x_i)]\quad (i=1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

автор называет оскулаторным, а по таблице

$$[x_i, f(x_i), f'(x_i), f''(x_i)]\quad (i=1, \ldots, n) \qquad (2)$$

— гипероскулаторным. В нашей литературе такое интерполирование чаще называют интерполированием соответственно с двухкратными и трехкратными узлами. Пусть существует обратная функция $x(f)$. Если $f'(x_i)\neq 0$, то ввиду $x'(f)=1/f'(x)$ и $x''(f)=-f''(x)/[f'(x)]^3$, по таблицам (1) или (2) легко составляются таблицы

$$[f_i, x(f_i), x'(f_i)] \qquad (3)$$

или

$$[f_i,\ x(f_i),\ x'(f_i),\ x''(f_i)] \quad (f_i = f(x_i)).$$

Интерполирование обратной функции $x(f)$ с двух- или трехкратными узлами может быть выполнено по известным формулам Лагранжа — Эрмита. Но громоздкость этих формул делает их неудобными для вычислений. Автор строит формулы, которые позволяют все необходимые вычисления в обоих случаях расположить в удобную схему и выполнять последовательно. Так, при интерполировании $x(f)$ при помощи таблицы (3) автор предлагает вычислять величины

$$\alpha_{ij} = 1/(f_i - f_j),\ a_i = \left\{\prod_{j\neq i} \alpha_{ij}\right\}^2,\ b_i = -2a_i \sum_{j\neq i} \alpha_{ij},$$

$$\alpha_i = a_i/(f - f_i)^2 + b_i/(f - f_i),\ \beta_i = a_i/(f - f_i),$$

$$x(f) \sim \sum (\alpha_i x_i + \beta_i x_i')/\sum \alpha_i,$$

$$x_i = x(f_i),\ x_i' = x'(f_i).$$

В. И. Крылов

6 В235. Об одном процессе приближения по принципу Чебышева. Aparo Enzo. Su un procedimento di approssimazione secondo Cebyscev. «Atti Accad. naz. Lincei-Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur.», 1960, **28**, № 3, 311—317 (итал.)

Предложенный Е. Я. Ремезом (1934 г.) второй алгоритм для численного построения полиномов наилучшего, в чебышевском смысле, приближения (см., например, РЖМат, 1960, 5925 К) получил некоторое обобщение для нелинейного случая в работе Е. П. Новодворского и И. Ш. Пинскера (Успехи матем. наук, 1951, **6**, № 6, 174—181; ниже цитируется как «статья Н. — П.»). Заметив, что в статье Н. — П. рассуждение в некоторых своих звеньях (с. 180) оформлено недостаточно убедительно, автор реферируемой статьи поставил себе целью дать построенный, в известной мере, по-новому вариант рассматриваемого важного рассуждения, что и выполнено без серьезных изъянов и в хорошо расчлененном изложении. Рассматриваемая задача заключается в нахождении среди функций $f(x) \in C_n$, где C_n — како й-нибудь заданный интерполяционный класс порядка n, той ($f = f^*$), для которой достигается минимум чебышевской нормы $\|f\| = \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|$. Само определение понятия интерполяционного класса, по существу эквивалентное имеющемуся в статье Н. — П., отличается несколько в формулировке свойства непрерывной зависимости функции $f(x)$ от определяющих ее интерполяционных данных. Но и в одной, и в другой статье упомянутое определение содержит требования, формально лишние, вытекающие в действительности из двух основных, каковыми являются: 1) непрерывность функций $f(x) \in C_n$ на $[a, b]$ и 2) однозначная определяемость $(x) \in C_n$ условиями $f(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ при произвольном назначении узлов $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ на $[a, b]$ и вполне произвольном задании действительных чисел y_i. Итеративный вычислительный процесс для определения f^* состоит в последовательном решении дискретных $(n+2)$-точечных чебышевских задач того же типа с заменой на каждом очередном k-ом этапе отрезка $[a, b]$, в качестве области аппроксимации, некоторым набором $P^{(k)} \subset [a, b]$ точек $x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \ldots < x_{n+1}^{(k)}$, что сводится к нахождению $f^{(k)} \in C_n$ под условием выполнения, при некотором соответствующем значении $\lambda^{(k)}$, соотношений $(-1)^\nu f^{(k)}(x_\nu^{(k)}) = \lambda^{(k)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n+1)$; при этом обеспечивается последовательное возрастание, при $k = 0, 1, 2\ldots$ значения $|\lambda^{(k)}|$, с выполнением предельного равенства $\lim |\lambda^{(k)}| = \rho$, где $\rho = \|f^*\|$, и, одновременно, $\lim f^{(k)}(x) = f^*(x)$ равномерно на $[a, b]$ (это последнее важное предельное соотношение явно в таком виде не сформулировано в реферируемой статье, но без труда выводится из заключений статьи). Оговоримся, что все доказательство сходимости проведено автором применительно к аналогу частного случая алгоритма референта, а именно — к тому упрощенному варианту алгоритма, в котором при переходе от $P^{(k)}$ к $P^{(k+1)}$ заменяется лишь одна из точек $x_\nu^{(k)}$, замещаемая такой точкой $\xi^{(k)} \in [a, b]$, в которой $|f^{(k)}(\xi^{(k)})| = \|f^{(k)}\|$. Автор отмечает в заключение, что рассмотрения статьи легко обобщаются для случая дискретного (сеточного) аналога решаемой задачи, в котором отрезок $[a, b]$ заменен каким-нибудь конечным множеством N точек $(N > n+2)$. Добавим, что в этом последнем случае итеративный процесс оказывается всегда конечным, и этот факт также легко устанавливается для «оптимального» варианта алгоритма, в котором при переходе от $P^{(k)}$ к $P^{(k+1)}$ заменяется весь состав набора $P^{(k)}$ в видах возможного ускорения процесса. В изложение статьи вкралась нечеткость в проведении первого этапа доказательства предложения 9 (стр. 314), но она легко устранима (ср. трактовку сходной ситуации в статье М. И. Морозова, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1952, **16**, 95). Е. Я. Ремез

6 В236. Об интерполировании периодической последовательности прямоугольных импульсов. Кочанов Н. С. «Изв. высш. учебн. заведений. Радиотехника», 1960, **3**, № 4, 506—508

Задача об интерполировании периодической последовательности прямоугольных импульсов решается с помощью тригонометрического полинома произвольного порядка.

6 В237. Метод интерполирования функций экспоненциальными полиномами и его применение к задачам синтеза электрических цепей по временным характеристикам. Кочанов Н. С. «Радиотехника», 1960, **15**, № 8, 61—66

Рассматривается методика построения экспоненциальных полиномов по заданным значениям временной функции и ее первой производной в ряде равноотстоящих узлов интерполяции. Показывается применение этого метода для синтеза четырехполюсника, формирующего колоколообразный импульс. Резюме автора

6 В238. Последовательные приближения, примененные к квадратурным формулам. Struble R. A., Miller R. R. Successive approximation applied to quadrature formulas. «Amer. Math. Monthly», 1960, **67**, № 7, Part 1, 661—664 (англ.)

На примере известного правила Симпсона показывается, как могут быть построены последовательные приближения к точному значению интеграла. Считая x произвольным, автор вводит оператор $Sf(x) = \frac{1}{6} x\left[f(0) + 4f\left(\frac{x}{2}\right) + f(x)\right]$. Его можно рассматривать как приближение y_1 к решению y уравнения $Dy = y' = f(x)$, подчиненного начальному условию $y(0) = 0$. Погрешность приближения $y_2 = y - y_1$ будет решением уравнения

$$y_2 = (1 - DS) f(x) \qquad (1)$$

и удовлетворять начальному условию $y_2(0) = 0$. За приближенное решение (1) можно принять $y_3 = S(1 - DS)f(x)$ Если погрешность обозначить $y_4 = y_2 - y_3$, то $y = y_1 + y_3 + y_4$. Вообще, говоря, если y_{2j} определить как решение уравнения $y_{2j} = (1 - DS)^j f(x)$ при условии $y_{2j}(0) = 0$ и положить $y_{2j+1} = S(1 - DS)^j f(x)$, то будет верно такое представление

$$y = \sum_{j=0}^{k-1} y_{2j+1} + y_{2k} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

При выполнении требования $\lim y_{2k} = 0$ $(k \to \infty)$ получится следующее разложение y по последовательным приближением: $y = \sum_{j=0}^{\infty} y_{2j+1}$. Подробно рассмотрен пример уравнения $y' = x^n$. В. И. Крылов

6 В239. Новая формула механических квадратур. Смирнов В. Н. «Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та», 1957, вып. 7(а), 77—85

Выведена формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + \sum_{i=0}^{m-1} f^{(2n+2i)}(0)\, D_{2n+2i} + R_{n,m}, \quad (1)$$

где $A_k = \dfrac{\sqrt{2\pi}\, n!}{H_n'^2(x_n)}$, $H_n(x)$ — полиномы Чебышева — Эрмита, x_k — его корни, взятые за узлы квадратурной формулы,

$$D_{2n+2i} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!} K_{2n}(t)\,dt,$$

$K_{2n}(f)$ — «ядро остатка», определяемое по формуле

$$K_{2n}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} [E(x-t) - E(-t)] \frac{(-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}\,dx -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} A_k [E(x_k - t) - E(-t)] \frac{(x_k - t)^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

($E(v)$ равно 1, 0,5 и 0 соответственно для $v > 0$, $v = 0$ и $v < 0$). Приводится другой, более удобный на практике прием для вычисления коэффициентов D_{2n+2i}. В частности, получена формула

$$D_{4+2i} = \frac{\sqrt{2\pi}}{(4+2i)!} [(3+2i)!! - 1].$$

Относительно остаточного члена $R_{n,m}$ доказана следующая теорема: Если $f(x)$ обладает тем свойством, что $f^{(2n+2m)}(x)$ и $f^{(2n+2m+2)}(x)$ разных знаков, то ошибка в формуле (1) при замене m на $m+1$ меняет знак и по абсолютной величине не превосходит первого отбрасываемого члена суммы

$$\sum_{i=0}^{m-1} f^{(2n+2i)}(0)\, D_{2n+2i}.$$

Иначе говоря, выполняется неравенство

$$|R_{n,m}| < |f^{(2n+2m)}(0)\, D_{2n+2m}|.$$

В. К. Саульев

6 В240. Дополнительные абсциссы и веса для квадратурных формул Гаусса высокого порядка: значения для $n = 64$, 80 и 96. Davis Philip, Rabinowitz Philip. Additional abscissas and weights for Gaussian quadratures of high order: values tor $n=64$, 80, and 96. «J. Res. Nat. Bur. Standards», 1958, **60**, № 6, 613—614 (англ.)

Приведены с двадцатью десятичными знаками значения абсцисс и весов в квадратурной формуле Гаусса для $n=64$, 80 и 96.

6 В241. Численное интегрирование при неравноотстоящих ординатах. Selmer Ernst S. Numerical integration by non- equidistant ordinates. «Nord. mat. tidskr.», 1958, **6**, № 3, 97—108 (англ.)

Подробно анализируется погрешность формулы численного интегрирования типа

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\,dx =$$

$$= (x_n - x_0)(K_0 y_0 + K_1 y_1 + \ldots + K_n y_n),$$

где $y = \varphi(x)$ — полином степени n, K_i-коэффициенты, зависящие только от отношений

$$(x_i - x_0)/(x_n - x_0),\ y_i = f(x_i),\ x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n.$$

6 В242. Обобщение квадратурной формулы Гаусса на случай m переменных. Гребенюк Д. Г. «УзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-матем. фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. н.», 1958, № 2, 69—76 (рез. узб.)

Квадратурная формула Гаусса обобщается на случай, когда областью интегрирования является m-мерный единичный куб. В частности, получена формула

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \approx 2\left[f\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \sqrt{\tfrac{1}{3}}, 0\right) + \right.$$

$$+ f\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}, -\sqrt{\tfrac{1}{3}}, 0\right) + f\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \sqrt{\tfrac{1}{3}}, 0\right) +$$

$$\left. + f\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}, -\sqrt{\tfrac{1}{3}}, 0\right)\right].$$

6 В243. Интерполяционные и квадратурные формулы на классах W_s^α и E_s^α. Смоляк С. А. «Докл. АН СССР», 1960, **131**, № 5, 1028—1031

Классы W_s^α и E_s^α состоят из функций вида

$$f(x) = \sum C_m e^{2\pi i (m,x)},\ m = (m_1, \ldots, m_s),\ x = (x_1, \ldots, x_s)$$

коэффициенты Фурье которых удовлетворяют соответственно неравенствам $\sum |(\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_s)^\alpha C_m|^2 \leqslant 1$ и $|C_m| \leqslant \dfrac{1}{(\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s)^\alpha}$, $\bar{m} = \max(1, |m|)$. Вводятся величины Δ_1 и Δ_2:

$$\Delta_1 = \min_a \inf_{\varphi_k(x) \in L_2} \sup_{f(x) \in W_s^\alpha} \int_0^1 \cdots \int_0^1 |f(x) -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} f(ka/N)\,\varphi_k(x)|^2 dx,$$

$$\Delta_2 = \min_a \inf_{\varphi_k(x) \in L_2} \sup_{f(x) \in E_s^\alpha} \int_0^1 \cdots \int |f(x) -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} f(ka/N)\,\varphi_k(x)|^2 dx,$$

где $a = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ — вектор. Основной результат работы касается интерполяционных формул для $f(x)$ с узлами интерполяции в точках параллелепипедальных сеток с координатами $(\{ka_1/N\}, \{ka_2/N\}, \ldots, \{ka_s/N\})$, $\{\gamma\}$ — целая часть γ, $k = 1, 2, \ldots, N$. Этот результат формулируется в виде следующих неравенств

$$\frac{1}{2N^\alpha} \leqslant \Delta_1 \leqslant C(\alpha, s)\,\frac{\ln^{\alpha(2s-1)} N}{N^\alpha} \quad \text{при } \alpha \geqslant 1,\ s \geqslant 2;$$

$$\frac{1}{2N^\alpha} \leqslant \Delta_2 \leqslant C(\alpha, s)\,\frac{\ln^{(2s-1)\alpha+s} N \cdot \ln^{2s} \ln N}{N^{\alpha - \frac{1}{2}}}$$

при $\alpha \geqslant 3/2$, $s \geqslant 2$,

где $C(\alpha, s)$ — некоторая постоянная, не зависящая от N. Оценки имеют место при N простом. Указаны некоторые следствия для квадратурных формул.

В. С. Рябенький

6 В244. Об одном методе нахождения точной границы погрешности формулы численного интегрирования в пространстве нескольких измерений. Hsu L. C. A method for finding precise error bounds of numerical integration formulas in higher dimensions. «Acta math.

Acad. scient. hung.», 1960, **11**, № 1-2, 163—171 (англ.; рез. русск.)

Функция $f(x, y)$ определена в прямоугольной области $Q(a \leqslant x \leqslant A; b \leqslant y \leqslant B)$ и такова, что ее частные производные $f^{(\mu, \nu)}(x, y)$ $(0 \leqslant \mu \leqslant n-1, 0 \leqslant \nu \leqslant m-1)$ непрерывны в Q, а производные $f^{(m, \nu)}(x, y)$ $(0 \leqslant \nu \leqslant n-1)$, $f^{(\mu, n)}(x, y)$ $(0 \leqslant \mu \leqslant m-1)$ и $f^{(m, n)}(x, y)$ являются кусочно-непрерывными по каждому аргументу. Знаком $W = W^{(m, n)}(M, M_\mu; N_\nu; Q)$ обозначается класс функций f, для которых выполнены условия $|f^{(m, n)}(x, y)| \leqslant M$, $|f^{(\mu, n)}(x, y)| \leqslant M_\mu$, $|f^{(m, \nu)}(x, y)| \leqslant N_\nu$, $(x, y) \in Q$. Здесь M, M_μ, N_ν — заданные числа. Пусть D есть плоская область, содержащаяся в Q, (x_i, y_j) — конечное множество точек, лежащих в D, и ρ_{ij} — связанные с ними весовые коэффициенты. Образуется кубатурная сумма $L(f) = \sum \rho_{ij} f(x_i, y_j)$ и ставится задача нахождения верхней грани $\varepsilon(L) = \sup_W \left| \iint_D f dx dy - L(f) \right|$ при условии, что кубатурная формула точна для многочленов степеней $m-1$ и $n-1$ от x и y соответственно. Доказывается, что $\varepsilon(L) = \sum_{\nu=0}^{n-1} N_\nu \mathfrak{G}_\nu + \sum_{\mu=0}^{m-1} M_\mu H_\mu + MF$, где $\mathfrak{G}_\nu$, H_μ и F есть некоторые числа, не зависящие от функций f и определяемые только по области D, точкам (x_i, y_j) и коэффициентам ρ_{ij}. Даны их явные выражения. Приведен пример формулы

$$\iint_Q f dx dy = \frac{1}{4}[f(0, 0) + f(1, 0) + f(0, 1) + f(1, 1)],$$
$$Q = [0 \leqslant x \leqslant 1; 0 \leqslant y \leqslant 1].$$

Рассматривается класс функции $W^{(2,2)}(M, M_\mu, N_\nu; Q)$. Здесь $\varepsilon(L) = \frac{5}{144} M + \frac{1}{12}(M_0 + N_0) + \frac{1}{24}(M_1 + N_1)$. Метод получения оценки может быть перенесен на пространства любого числа измерений. В. И. Крылов

6 В245. Видоизменение метода Филона численного интегрирования. Flinn E. A. A modification of Filon's method of numerical integration. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1960, **7**, № 2, 181—184 (англ.)

Для вычисления

$$\int_A^B f(x) \cos px \cdot \cos rx dx \qquad (1)$$

и сходного интеграла, содержащего $\sin px$, при больших p отрезок $[A, B]$ делится на части длины $2h$; на каждой части выполняется интерполирование f пятой степени по значениям f и f' на концах и в средней точке частичного отрезка и в интеграле (1) f заменяется интерполирующим многочленом. Указаны выражения параметров полученной приближенной расчетной формулы. Приведен пример, позволяющий судить, в какой мере новый метод точнее метода Филона. В. И. Крылов

6 В246. О сходимости механической квадратуры. Dieulefait Carlos. Sobre la convergencia de la cuadratura mecanica. «Math. notae». 1959, **17**, № 1-2, 37—42 (исп.)

На конечном отрезке $[a, b]$ задаются точки ξ_{in} $(i = 1, \ldots, n; n = 1, 2, \ldots)$ $\xi_{in} < \xi_{jn}$ $(i < j)$ и с ними сопрягаются произвольно выбираемые неотрицательные числа l_{in}. По ним составляется квадратурная сумма $Q_n(f) = \sum_{i=1}^n l_{in} F(\xi_{in})$. Пусть $\alpha(x)$ — неубывающая функция на $[a, b]$ и $F(x)$ есть любая функция, для которой существует интеграл Римана — Стилтьеса $J = \int_a^b F(x) d\alpha(x)$. Ставится задача выяснения условий, которым должны удовлетворять l_{in}, чтобы квадратурный процесс сходился для всякой функции F: $\lim_{n \to \infty} Q_n(F) = J$. Вводится кусочно-постоянная функция $\Phi_n(x)$, имеющая скачки величины $1/n$ в каждой точке ξ_{in}, и считается, что существует равномерный предел $\lim_{n \to \infty} \Phi_n(x) = \Phi(x)$. Формулируется и доказывается следующая теорема: Необходимым и достаточным условием для сходимости квадратурного процесса при всякой функции $F(x)$ является выполнение асимптотического равенства $l_{in} = \rho_{in} + \varepsilon(n)$, где $\rho_{in} = \frac{1}{n} \frac{d\alpha(\xi_{in})}{d\Phi(\xi_{in})}$ и $\lim_{n \to \infty} n\varepsilon(n) = 0$. Рассуждения автора содержат ряд неточностей, обесценивающих работу.

В. И. Крылов

6 В247. Полезная аппроксимация в теории резонансного поглощения. Keane A., McKay M. H. A useful approximation in the theory of resonance absorption. «Austral. J. Appl. Sci.», 1960, **11**, № 3, 321—328 (англ.)

Речь идет об аппроксимации интегралов типа

$$\int_{-\infty}^{\infty} [1 - \exp(-\alpha\psi)] dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi}{\psi + a} dx,$$

где

$$\psi \equiv \psi(x, \xi) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{-1/4 \xi^2 (x-y)^2\}}{1 + y^2} dy$$

и α и a — постоянные. В частности, обсуждается сообщенная И. С. Гуревичем и И. Я. Померанчуком на конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1955 г.), формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} [1 - \exp(-\alpha\psi)] dx =$$
$$= \frac{2\sqrt{\pi}}{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{\alpha\xi\sqrt{\pi}}{2} \right)^n \frac{\exp\left\{\frac{1}{4}(n-1)\xi^2\right\}}{n!\sqrt{n}} \times$$
$$\times \left\{ \operatorname{erfc}\left[\left(\frac{n-1}{4n} \right)^{\frac{1}{2}} \xi \right] \right\}^n.$$

6 В248. Об одном классе ортогональных многочленов и об общих формулах квадратур с наименьшим числом членов. Stancu D. D. Sur une classe de polynomes orthogonaux et sur des formules générales de quadrature a nombrei minimum de termes. «Bull. math. Soc. sci. math. et phys. RPR», 1957, **1**, № 4, 479—498 (франц.)

Рассматривается последовательность ортогональных с весом $p(x) x^{2s}$ на конечном или бесконечном интервале $(-a, a)$ многочленов

$$D_{2n+1, 2s}(x) = \begin{vmatrix} c_{2s+2} & c_{2s+1} & \ldots & c_{2s+2n} & 1 \\ c_{2s+4} & c_{2s+6} & \ldots & c_{2s+2n+2} & x^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{2s+2n+2} & c_{2s+2n+4} & \ldots & c_{2s+4n} & x^{2n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{2s} & c_{2s+2} & \ldots & c_{2s+2n} \\ c_{2s+2} & c_{2s+4} & \ldots & c_{2s+2n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{2s+2n} & c_{2s+2n+2} & \ldots & c_{2s+4n} \end{vmatrix},$$

$$D_{2n, 2s}(x) = \begin{vmatrix} c_{2s+2n} & \ldots & c_{2s+4n-2} & x^{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{2s+2} & \ldots & c_{2s+2n} & x^2 \\ c_{2s} & \ldots & c_{2s+2n-2} & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{2s+2n} & \ldots & c_{2s+4n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{2s+4} & \ldots & c_{2s+2n+2} \\ c_{2s+2} & \ldots & c_{2s+2n} \end{vmatrix},$$

где $c_{2s+k} = \int_{-a}^{+a} p(x) x^{2s+k} dx$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, s — целое положительное число, $p(x)$ — положительная четная в $(-a, a)$ функция, такая, что все моменты c_{2s+k} существуют. Указанный класс ортогональных симметрических многочленов применяется для получения формул, обобщающих классические формулы квадратур типа Гаусса

$$\int_a^b p(t) f(t) dt = \sum_{i=0}^{s} \sum_{k=0}^{r_i} a_{ik} f^{(k)}(t_i) + R[f]$$

со степенью точности $2N-1$, где N — число коэффициентов a_{ik}, отличных от нуля. Рассматривая функцию $f(x)$, дифференцируемую достаточное число раз в $(-a, a)$ и воспользовавшись интерполяционной формулой Эрмита с тремя совокупностями узлов (1) $x_1, x_2, \ldots x_m$, 2) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ и 3) нуль — 2s-ой кратности), автор приходит к выводу: для того, чтобы в формуле квадратур

$$\int_{-a}^{+a} p(x) f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} A_i f(x_i) + \sum_{j=1}^{r} B_j f(\alpha_j) + \sum_{k=0}^{2s-1} C_k f^{(k)}(0) + \rho[f]$$

при $r = m$ и произвольных узлах $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ имело место $B_1 = B_2 = \ldots = B_m = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (фундаментальные узлы) были m действительными и различными корнями многочлена $D_{m,2s}(x)$. Рассмотрен ряд частных случаев, получены выражения для остаточного члена $\rho[f]$. При вышеуказанных условиях в случае $m = 2n$ формула квадратур имеет вид:

$$\int_{-a}^{+a} p(x) f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{2n} A_i f(x_i) + \sum_{k=0}^{s-1} C_{2k} f^{(2k)}(0) + \rho[f]. \quad (1)$$

Приведем некоторые из рассмотренных частных формул.

1. Если фундаментальные узлы являются корнями многочлена $D_{n,2}(x)$, то формула (1) приводится к общей формуле типа Гаусса с нечетным числом узлов:

$$\int_{-a}^{+a} p(x) f(x)\,dx = C_0 f(0) + \sum_{i=1}^{2n} A_i f(x_i) + \frac{f^{(4n+2)}(\xi)}{(4n+2)!} \int_{-a}^{+a} p(x) \widetilde{I}^2_{2n+1}(x)\,dx,$$

где $\widetilde{I}_{2n+1}(x) = \widetilde{D}_{2n+1,0}(x)$, $\widetilde{D}_{2n+1,2s}(x) = x \cdot \widetilde{D}_{2n,2s+2}(x)$.

2. Если воспользоваться в качестве узлов корнями многочлена $x^2 D_{2n+1}(x)$, то получаются обобщенные квадратурные формулы типа Гаусса.

3. При $p(x) = (1-x^2)^\alpha$, $\alpha > -1$, $a = 1$, $s = 0$, $m = 1$

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^\alpha f(x)\,dx = 2^{\alpha+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(2\alpha+4)} [2(2\alpha+3) f(0) + f''(0)] + 2^\alpha \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(2\alpha+6)} f^{IV}(\xi),$$

где Γ — гамма-функция.

4. При $s = 2$, $m = 3$ и $\alpha = 0$

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{1}{36015}\left\{50160 f(0) + 3500 f''(0) + 49 f^{IV}(0) + 10\,935\left[f\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\right]\right\} + \frac{1}{404\,157\,600} f^{(10)}(\zeta).$$

5. При $p(x) = e^{-x^2}$, $a = \infty$, $s = 2$, $m = 3$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{16\,464}\left\{15\,744 f(0) + 2856 f''(0) + 147 f^{IV}(0) + 360\left[f\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)\right]\right\} + \frac{\sqrt{\pi}}{552\,960} f^{(10)}(\xi).$$

Имеются опечатки, например на стр. 481 напечатано $\mu_{k,2s}$ $\int_{-a}^{+a} p(x) x^{2s+k} dx$ вместо $\mu_{k,2s} = \int_{-a}^{+a} p(x) x^{2s+k} dx$; на стр. 480 две различные формулы обозначены одним и тем же номером, тогда как на стр. 490 дается ссылка (1′) на вторую из них; на стр. 498 (9 стр. сверху) напечатано $f\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$ вместо $f\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$. Д. Б. Тополянский

6 В249. Вычисление интегралов от произведения многих сферических функций. Jucys A., Perkalskis B., Šugurovas V., Ušpalis K. Daugelio rutulinių funkcijų sandaugos integralų skaičiavimas. «Vilniaus Univ. Mokslo darbai. Matem., fiz. ir Chem. mokslų ser., Уч. тр. Вильнюсск. ун-т. Сер. матем., физ. и хим. н.», 1955, **3**, 35—62 (лит.; рез. русск.)

Вычисление интегралов от произведения многих сферических функций сводится к вычислению интеграла от произведения соответствующих присоединенных функций Лежандра. Приводится ряд таблиц значений интегралов от произведения четырех и пяти присоединенных функций Лежандра. Из резюме авторов

6 В250. Некоторые новые алгорифмы с разделенными разностями для двух переменных. Salzer Herbert E. Some new divided difference algorithms for two variables. On Numerical Approximat. Madison, Univ. Wisconsin Press, 1959, 61—98 (англ.)

Исследуются интерполяционные полиномы для функции двух переменных $f(x, y)$. Рассматриваются две (разностные) схемы построения таких полиномов.

Схема I. Функции $f(x, y)$ ставится в соответствие следующее выражение:

$$f(x,y) \sim a + b(x-x_0) + c(y-y_0) + (x-x_0)(y-y_0)\times [d + e(x-x_2) + f(y-y_2)] + \ldots + (x-x_0)(y-y_0)\times (x-x_2)(y-y_2)\times (x-x_{2i-2})(y-y_{2i-2})\times [l + m(x-x_{2i}) + n(y-y_{2i})] + \ldots \quad (1)$$

При этом точки (x_i, y_j) расположены тройками, образующими L-конфигурации:

$$\{(x_0,y_0), (x_1,y_0), (x_0,y_1)\}; \{(x_2,y_2), (x_2,y_3), (x_3,y_2)\}; \ldots; \ldots; \{(x_{2i},y_{2i}), (x_{2i+1},y_{2i}), (x_{2i},y_{2i+1})\};$$

и т. д., которые автор называет ортотройками. Вводятся следующие обозначения: $f(x_i, y_j) = f_{ij} = [x_i, y_j]$. Предполагается, что $[x_i, y_j] = [y_j, x_i]$. В этих обозначениях коэффициенты выражения (1) имеют вид:

$$a = [x_0; y_0]; \quad b = [x_1 x_0; y_0] = \frac{[x_1; y_0] - [x_0; y_0]}{x_1 - x_0}; \quad (2)$$

$$c = [x_0; y_1 y_0] = \frac{[x_0; y_1] - [x_0; y_0]}{y_1 - y_0} \quad \text{и т. д.}$$

Показана справедливость соотношений

$$[x_{2m+1}x_{2m}\ldots x_0;\ y_{2m}y_{2m-1}\ldots y_0] = \frac{[x_{2m+1}x_{2m-1}\ldots x_0;\ y_{2m}y_{2m-1}\ldots y_0]}{x_{2m+1} - x_{2m}} - \frac{[x_{2m}x_{2m-1}\ldots x_0;\ y_{2m}y_{2m-1}\ldots y_0]}{x_{2m+1} - x_{2m}}, \quad (3)$$

$$[x_{2m}x_{2m-1}\ldots x_0;\ y_{2m+1}y_{2m}\ldots y_0] = \frac{[x_{2m}x_{2m-1}\ldots x_0;\ y_{2m+1}y_{2m-1}\ldots y_0]}{y_{2m+1} - y_{2m}} - \frac{[x_{2m}x_{2m-1}\ldots x_0;\ y_{2m}y_{2m-1}\ldots y_0]}{y_{2m+1} - y_{2m}}, \quad (4)$$

$$[x_{2m}x_{2m-1}\ldots x_0;\ y_{2m}y_{2m-1}\ldots y_0] = \frac{[x_{2m}x_{2m-3}\ldots x_0;\ y_{2m}y_{2m-2}\ldots y_0]}{x_{2m} - x_{2m-2}} - \frac{[x_{2m-2}x_{2m-3}\ldots x_0;\ y_{2m-1}y_{2m-2}\ldots y_0]}{x_{2m} - x_{2m-2}} +$$

$$+\frac{[x_{2m}x_{2m-2}\ldots x_0;\ y_{2m-2}y_{2m-3}\ldots y_0]}{y_{2m}-y_{2m-2}}-$$

$$-\frac{[x_{2m-1}x_{2m-2}\ldots x_0;\ y_{2m-2}y_{2m-3}\ldots y_0]}{y_{2m}-y_{2m-2}}. \qquad (5)$$

Доказывается следующая (фундаментальная) теорема: Выражение

$$\alpha \equiv [x_0; y_0] + [x_1x_0; y_0](x-x_0) + [x_0; y_1y_0](y-y_0) +$$
$$+ (x-x_0)(y-y_0)\{[x_2x_1x_0;\ y_2y_1y_0] + [x_2x_1x_0;\ y_2y_1y_0]\times$$
$$\times (x-x_2) + [x_2x_1x_0;\ y_3y_2y_1y_0](y-y_2)\} + \ldots + (x-x_0)\times$$
$$\times (y-y_0)\ldots(x-x_{2n-2})(y-y_{2n-2})\{[x_{2n}\ldots x_0;\ y_{2n}\ldots y_0] +$$
$$+ [x_{2n+1}x_{2n}\ldots x_0;\ y_{2n}\ldots y_0](x-x_{2n}) +$$
$$+ [x_{2n}\ldots x_0;\ y_{2n+1}y_{2n}\ldots y_0](y-y_{2n})\},$$

определенное для $n+1$ ортотройки, где коэффициенты $[x_kx_{k-1}\ldots x_0;\ y_ly_{l-1}\ldots y_0]$ определяются из соотношений (2), (3), (4), (5), равно f_{ij} в каждой точке $x=x_i$, $y=y_j$ для всех ортотроек. Обсуждаются вопросы предельной сходимости выражений для коэффициентов полинома, когда $x_{2m+1}\to x_{2m}$; $y_{2m+1}\to y_{2m}$. Доказывается следующая теорема: Сходящиеся формы существуют для каждого коэффициента, когда $x_{2m+1}\to x_{2m}$ или $y_{2m+1}\to y_{2m}$ или оба эти соотношения имеют место одновременно.

Схема II. В этой схеме изучаются выражения вида

$$f(x,y) \sim a + b(x-x_0) + c(y-y_0)(x-x_1) +$$
$$+ d(x-x_0)(y-y_1)(x-x_2) +$$
$$+ e(y-y_0)(x-x_1)(y-y_2)(x-x_3) + \ldots$$

При этом рассматриваются точки (x_i, y_i), неравномерно расположенные, причем предполагается, что $x_i=x_j$ или $y_i=y_j$ только в случае $i=j$. Для схемы II проводятся исследования подобные исследованиям, проведенным для схемы I, и доказываются аналогичные теоремы. Для обеих схем приводятся выражения нескольких первых коэффициентов интерполяционных полиномов в явном виде. В заключение перечисляется 15 проблем, соприкасающихся с работой, которые требуют исследования. Библ. 13 назв. Ю. М. Барабошкин

6 В251. О численном дифференцировании функций многих переменных. Simonsen W. On numerical differentiation of functions of several variables. «Skand. aktuarietidskr.», 1959, № 1-2, 73—89 (англ.)

Рассматривается функция двух переменных $f(x, y)$. Предполагается существование и непрерывность ее частных производных

$$f_{\alpha\beta}(x,y) = \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} f(x,y) \quad (\alpha=0,\ldots,m+1;\ \beta=0,\ldots,n+1)$$

в открытой двумерной области, содержащей точку (x, y) и точки (x_μ, y_ν) $(\mu=0,\ldots,m;\ \nu=0,\ldots,n;\ x_0<\ldots<x_m;\ y_0<\ldots<y_n)$, которые образуют прямоугольную сетку. Выводится следующая формула для численного дифференцирования функции $f(x, y)$:

$$f_{ij}(x,y) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} \frac{D^i p_\mu(x)}{p_\mu(x_\mu)} \cdot \frac{D^j q_\nu(y)}{q_\nu(y_\nu)} f(x_\mu, y_\nu) + Rf(x,y),$$

$$(0\leqslant i\leqslant m;\ 0\leqslant j\leqslant n),$$

где

$$p_\mu(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq\mu}}^{m}(x-x_k);\quad q_\nu(y) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq\nu}}^{n}(y-y_k);\quad Rf(x,y)$$

— остаточный член. Дается общее выражение для $Rf(x,y)$. Рассматриваются некоторые частные случаи и выводятся соответствующие упрощенные формулы для $Rf(x, y)$.

Ю. М. Барабошкин

6 В252. Получение сферических бесселевых функций в цифровых вычислительных машинах. Corbató Fernando J., Uretsky Jack L. Generation of spherical Bessel functions in digital computers. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1959, **6**, № 3, 366—375 (англ.)

Изложен один способ нахождения значений бесселевых функций $j_n(x)$, $h_n(x)$ для $0\leqslant n\leqslant N$ и заданного действительного аргумента x. Функции мнимого аргумента определяются через них следующим образом:

$$i_n(x) = (-i)^n j_n(ix),$$
$$k_n(x) = -i^n h_n(ix).$$

Приводится вычислительная формула

$$\left(\frac{2n+1}{x}\right) f_n(x) = f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x), \qquad (1)$$

где $f_n(x)$ — одна из функций $j_n(x)$, $h_n(x)$. Исследуется поведение функций $j_n(x)$, $h_n(x)$, рассматриваются вопросы точности вычислений при использовании формулы (1) и связанные с ними вопросы направления рекурсии для различных значений аргумента x. Основные рассуждения проводятся для функций $j_n(x)$. Дан способ нахождения начальных условий для (1) в случае рекурсии «вниз». Описан несколько измененный метод вычисления бесселевых функций, который применялся в Массачусетском технологическом институте. Библ. 6 назв. Ю. М. Барабошкин

6 В253. Применение вычислительного автомата Мерседес для матричных вычислений. Lill D. Anwendung der Mercedes—Rechenautomaten bei der Matrizenrechnung. «Neue Techn. Büro», 1960, **4**, № 9, 297—299 (нем.)

Рассматривается с методической точки зрения процесс решения четырех линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными на настольной вычислительной машине Мерседес.

6 В254. Метод гармонического синтеза, основанный на использовании таблиц спектральных функций. Заездный А. М. «Тр. учебн. ин-тов связи. М-во связи СССР», 1960, вып. 1, 25—44

Предлагается метод гармонического синтеза, основанный на использовании таблиц спектральных функций, преимуществом которого перед другими методами является большая общность и упрощение вычислений. Сущность метода состоит в том, что по таблицам спектров финитных функций подбирается такая спектральная функция

$$S(j\omega,\tau) = \int_0^{\tau} f(t)e^{-j\omega t}\,dt,$$

чтобы при некотором определенном значении τ/T и замене $\omega=n\Omega$ удовлетворялось равенство для расчета коэффициентов Фурье вида:

$$\dot{C}_n = A_n - jB_n = \frac{\Omega}{\pi} S(in) = \frac{\Omega}{\pi}[S_1(n) + jS_2(n)].$$

Подробно излагается методика вычислений. Сформулирован критерий для оценки принципиальной возможности представления данного ряда в замкнутом виде с помощью известных функций. В приложении даются общие сведения о финитных функциях и их спектрах. Перечисляются приемы, позволяющие решать задачи отыскания спектра финитной функции. Изложение проведено в плане использования результатов для гармонического синтеза. Приведены таблицы спектров некоторых финитных функций и конкретные примеры, иллюстрирующие применение метода. И. Ф. Шелихова

6 В255. Расчеты одномерных решетчатых конструкций. Dean Donald L., Tauber Seimo. Solutions for one—dimensional structural lattices. «J. Engng Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs», 1959, **85**, № 4, 31—41 (англ.)

Рассматриваются некоторые методы расчета плоских решетчатых ферм с использованием уравнений в конечных разностях. Ю. М. Барабошкин

6 В256 К. Решение уравнений и систем уравнений. Ostrowski A. M. Solution of equations and systems of equations. New York—London, Acad. Press, 1960, X, 202 pp. (англ.)

Книга посвящена решению алгебраических и трансцендентных уравнений (а также систем этих уравнений) и является в некотором смысле «мостом между чистой и практической математикой» в области этих вопросов. В нее включено много неопубликованных результатов автора. Изложение материала лаконичное, математически строгое, с небольшим количеством числовых примеров и малочисленной библиографией. Из общего числа 202 страниц 125 страниц занимают 18 глав, а остальные — 11 дополнений. Названия глав следующие: 1. Остаточные члены интерполяционных формул. 2. Обратная интерполяция, производные обратных функций, одна интерполяционная точка. 3. Метод «regula falsi». 4. Итерации. 5. Дальнейшая дискуссия об итерациях; кратные корни. 6. Метод Ньютона-Рафсона. 7. Фундаментальные теоремы существования в методе Ньютона-Рафсона. 8. Аналог метода Ньютона-Рафсона для кратных корней. 9. Границы Фурье для итераций Ньютона-Рафсона. 10. Граница Данделина (Dandelin) для итераций Ньютона-Рафсона. 11. Три интерполяционные точки. 12. Линейные разностные уравнения. 13. n различных точек интерполяции. 14. $n+1$ совпадающих точек интерполяции и разложение корня в ряд Тейлора. 15. Нормы векторов и матриц. 16. Две теоремы о сходимости произведения матриц. 17. Теорема о расходимости произведения матриц. 18. Характеристика точек притяжения (attraction) и отражения (repulsion) для итераций с несколькими переменными.

Названия дополнений следующие: 1. Непрерывность корней алгебраических уравнений. 2. Относительная непрерывность корней алгебраических уравнений. 3. Явная формула для n-й производной от обратной функции. 4. Аналог метода regula falsi для двух уравнений с двумя неизвестными. 5. Улучшенное правило Стеффенсена об итерациях. 6. Алгоритм Ньютона-Рафсона для квадратных полиномов. 7. Некоторые модификации и улучшения метода Ньютона-Рафсона. 8. Округление в обратной интерполяции. 9. Ускоренные итерации с сверхлинейной сходимостью. 10. Корни уравнения $f(z)=0$ из коэффициентов разложения $1/f(z)$. 11. Непрерывность фундаментальных корней как функций элементов матрицы. В. К. Саульев

6 В257 К. Численные решения алгебраических уравнений. Т. 1. Уравнения типа $F(x)=0$. Корни полинома. Durand E. Solutions numériques des équations algébriques. T. 1. Equations du type $F(x)=0$ racines d'un polynôme. Paris, Masson et Cie, 1960, VII, 327 p., ill., 65 NFr. (франц.)

Излагаются различные, в основном итерационные, методы численного решения алгебраических уравнений. Рассматриваемые уравнения могут иметь как вещественные, так и комплексные коэффициенты. Книга содержит 10 глав. Гл. I «Решения в виде бесконечных разложений» посвящена отысканию решений уравнения $F(x)=0$ в виде разложения по целым степеням величины $a_0=F(x_0)$:

$$\xi = x - x_0 = -\frac{a_0}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}\left(\frac{a_0}{a_1}\right)^2 - \left[2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 - \frac{a_3}{a_1}\right]\left(\frac{a_0}{a_1}\right)^3 - \left[5\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3 - 5\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_4}{a_1}\right]\left(\frac{a_0}{a_1}\right)^4 - \dots, \quad (1)$$

где $a_p = \frac{1}{p!}F^{(p)}(x)\mid_{x=x_0}$, при условии $a_1 = F'(x_0) \neq 0$.

Эта формула получается при помощи разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $x=x_0$ функции $F(x)$:

$$-a_0 = a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots \quad (2)$$

и дает наименьший по модулю корень рассматриваемого уравнения. В случае $a_1=0$ разложение (2) преобразуется к виду $\sqrt{-a_0} = c_1\xi + c_2\xi^2 + \dots$, где $c_1^2 = a_2$, $2c_1c_2 = a_3, \dots$ Здесь же приводятся разложения для уравнений частного вида $ax=1$, $x^p=a$, $e^x=a$, $\sin x = a$ и др. Рассматриваются также решения в виде отношения двух рядов, каждый из которых есть разложение по целым степеням a_0, и в виде непрерывной дроби. Сходимость рассматриваемых разложений не всегда удовлетворительна. В гл. II «Обобщения на итерационные методы» излагаются общие свойства итерационных процессов, причем рассматриваются как обычные процессы вида $x_{n+1}=f(x_n)$, так и так называемые итерационные процессы высших порядков, которые можно трактовать как разложения ξ вида (1), взятые с одним двумя и более слагаемыми. Так, известная формула Ньютона (интерационная формула 2-го порядка) $x_{n+1}=x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$ фактически есть разложение (1) с удержанием одного слагаемого. Итерационная формула 3-го порядка имеет вид $x_{n+1}=f(x_n)$, где

$$f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} - \frac{1}{2}\frac{F''(x)}{F'(x)}\left(\frac{F(x)}{F'(x)}\right)^2,$$

т. е. представляет собой разложение (1) с удержанием двух слагаемых. Аналогично рассматриваются итерационные формулы высших порядков. Таким образом, применение разложений вида (1) как итерационных формул значительно ускоряет сходимость процесса, но сам процесс вычислений становится более сложным. Наиболее эффективны итерационные формулы 2-го (формула Ньютона) и 3-го порядков. В гл. III «Уравнения, содержащие трансцендентные функции рассматривается применение итерационных методов к решению трансцендентных уравнений вида $F(x)=0$. В частности предлагается сведение трансцендентного уравнения к алгебраическому путем разложения трансцендентных функций в ряд по степеням $u=x-x_0$ с конечным числом членов. Если имеется таблица значений функции $F(x)$ для нескольких равноотстоящих значений аргумента $x_k = x_0 + k\Delta x$, $k=0,1,2,\dots$, то для нахождения корня $x_p = x_0 + p\Delta x$ уравнения $F(x)=0$ предлагается построить по имеющимся табличным значениям $F(x)$ интерполяционный полином (Бесселя, Эверетта, Стирлинга, Ньютона) и применить к нему итерационный процесс 1-го порядка для определения p такого, что $F(x_p)=0$. Гл. IV «Операции над полиномами» содержит схему Горнера для вычисления значения полинома $P_n(x)$ для некоторого x, схему вычислений значений полинома для ряда равноотстоящих значений x, процесс деления полинома на двучлен $x-r$, вычисление последовательных производных от полинома при $x=r$, деление полинома на полином и другие операции над полиномами. Проводится построение полинома степени n по $n+1$ его значениям, вычисление значения при $x=r$ полинома, заданного своими $n+1$ значениями или $n+1$ значениями полинома и его производных. Все описанные алгорифмы удобны для программирования на электронные машины.

В гл. V «Преобразования полиномиального уравнения $P_n(x)=0$» приводятся соотношения между корнями и коэффициентами полинома, а также различного рода преобразования полинома, которые являются частными случаями общего гомографического преобразования $z=(aZ+b)/(cZ+b)$. В гл. VI „Локализация корней в комплексной плоскости„ приводятся некоторые правила, характеризующие наличие у полинома с вещественными коэффициентами положительных и отрицательных вещественных корней, а также комплексных корней; даются границы наибольшего вещественного корня. Приводятся теорема

Штурма и удобная схема Рауса (схема I) для вычисления коэффициентов ряда Штурма. Исследуется также расположение корней относительно мнимой оси. На практике с этой целью применяется комбинация схемы II Рауса и схемы Горнера. Схема II удобна при проверке, является ли данный полином полиномом Гурвица. С этой же точки зрения рассматриваются и полиномы с комплексными коэффициентами. Гл. VII посвящена методам Бернулли и Греффе для определения корней полинома и некоторым видоизменениям этих методов. Гл. VIII „Последовательное вычисление корней полинома итерационными методами" посвящена применению итерационных методов к вычислению корней полинома. С этой целью алгебраическое уравнение преобразуется каким-либо способом (выделение члена, содержащего x или x^n и т. п.) к виду $x = f(x)$, причем в окрестности искомого корня должно выполняться условие $|f'(x)| < 1$. К преобразованному уравнению применяются итерационные формулы 1-го порядка. Одним из методов вычисления вещественного корня является итерация коэффициентов полинома $(n-1)$-й степени, вычисляемых по формуле $b_p = a_p + b_{p-1}x$ (a_p — коэффициенты исходного полинома n-й степени). Каждое следующее приближение x получается из условия $b_n = a_n + b_{n-1}x = 0$ (метод Лина). Этот метод применим и в случае полиномов с комплексными коэффициентами. Аналогичный процесс применяется и при переходе от полинома степени n непосредственно к полиному $(n-2)$-й степени. При этом определяются сумма и произведение двух корней. Здесь приводятся также применяемая для улучшения вещественного корня итерационная формула 2-го порядка вида $x_{k+1} = x_k - \frac{b_n}{c_{n-1}}$, где b_i, c_i — первые два столбца схемы Горнера, т. е. $b_n = P(x)$, $c_{n-1} = P'(x)$, и аналогичная формула для случая комплексной плоскости, а также метод Барстоу, заключающийся в вычислении и исключении двух корней по их сумме и произведению. Даются также итерационные формулы 3-го порядка для вещественной оси и комплексной плоскости (формула Лагерра) и метод Мюллера. Проводится сравнение различных методов с точки зрения их эффективности и сложности. В гл. IX автор занимается вопросами одновременного нахождения всех корней полинома итерационными методами. Различаются случаи только вещественных корней и произвольных корней. Идея применяемых методов состоит в составлении n уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при помощи, например, формул Виета или сумм одинаковых степеней корней. В обоих случаях применяются итерационные формулы как 1-го, так и 2-го порядков. Методы применимы в основном к уравнениям низких степеней, так как с ростом степени они сильно усложняются. Точность этих методов ниже точности, имеющей место при последовательном нахождении корней. В случае комплексных корней подробно изучаются уравнения 3-й, 4-й и 5-й степеней при итерационном процессе 1-го порядка и 3-й и 4-й степеней — при итерационном процессе 2-го порядка. В гл. X содержится ряд заметок, касающихся арифметических операций с числами, имеющими более 10 цифр. Приведены блок-схемы некоторых программ для вычислений с плавающей запятой с обычной и удвоенной точностью. Во всех главах приводятся многочисленные примеры на применение излагаемых методов, что значительно облегчает чтение книги. В конце каждой главы даются упражнения с ответами. Г. И. Бирюк

6 В258 К. Методы численного расчета. Т. 1. Нелинейная алгебра. Korganoff A. Méthodes de calcul numérique. T. 1. Algèbre non linéaire. Paris, Dunod, 1961 (1960), XXVII, 375 p., ill., 44 NFr. (франц.)

Рассматриваются численные методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений, методы решения систем нелинейных уравнений и определение собственных значений матриц. Книга состоит из пяти глав и приложения. В гл. 1 дается краткое изложение общих принципов работы электронных вычислительных машин, а также рассматриваются вопросы, связанные с использованием этих машин: представление чисел в машине, виды операций, выполняемых машиной, принципы построения программ и т. п. Гл. 2 посвящена вопросам теории погрешностей, возникающих в процессе вычислений в результате замены некоторого процесса приближенным процессом. Вводится понятие вероятностной ошибки. Рассматривается задача нахождения ошибки результата (вероятностной и предельной) с учетом ошибок в данных, ошибок округления и ошибок метода, и обратная задача — нахождение ошибок округления и измерения, если известна ошибка результата (предельная или вероятностная). Гл. 3 посвящена нахождению вещественных корней алгебраических и трансцендентных уравнений общего вида $f(x)=0$. Основное внимание уделяется приближению корней с помощью так называемых рекуррентных (или итерационных) методов p-го порядка, определяемых формулой

$$x_{i+p} = \varphi(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-1}).$$

При этом различаются рекуррентные методы 1-го порядка ($p=1$), когда в процессе участвует одно значение переменной или одна предшествующая точка, и методы высших порядков ($p>1$), когда в процессе используется несколько значений переменной или несколько предшествующих точек. Подробно изложены рекуррентные методы 1-го порядка: метод пропорциональных частей, метод Ньютона, метод Шрёдера, являющийся расширением метода Ньютона и основанный на разложении функций в ряд Тейлора, методы Кёнига и Бернулли и другие методы. Из числа рекуррентных методов высших порядков приведены модифицированный метод Ньютона (в котором используются две предшествующие точки), метод Мюллера весьма эффективный метод Эйткена, а также методы Виланда и Островского. Рассматриваются также системы нелинейных уравнений и применение к их решению метода Шрёдера и метода градиентов, а также рекуррентных методов высшего порядка: модифицированного метода Ньютона и метода, являющегося обобщением метода Эйткена. Выясняются условия сходимости изложенных методов. Кратко рассматривается случай уравнения $f(x)=0$ с комплексной переменной. В гл. 4 излагаются методы численного решения алгебраических полиномиальных уравнений вида

$$p_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

с вещественными и комплексными коэффициентами. При этом рассматриваются также различного рода операции над полиномами и преобразования полиномов, дается определение и способ вычисления общего наибольшего делителя двух полиномов, разложение полинома в непрерывную дробь и т. п. Подробно рассмотрен вопрос относительно расположения корней алгебраического уравнения в комплексной плоскости. Дается ряд методов оценки собственных значений матрицы (методы Гершгорина, Брауэра, Островского). Изложены метод Штурма в случае уравнения с вещественными коэффициентами и методы Лемера и Рауса в случае уравнений с комплексными коэффициентами. Приведен также метод Хичкока для определения мнимых частей корней. Среди прямых методов отделения корней рассмотрены метод Бернулли для уравнений с вещественными коэффициентами и метод Лобачевского — Греффе для уравнений с комплексными коэффициентами, а также некоторые другие методы. Приведены также методы решения алгебраического уравнения путем выделения множителей: линейного (метод Лина) и квадратичного (методы Лина и Барстоу). Здесь же изложен метод исключения в применении к системам алгебраических полиномиальных уравнений с вещественными или комплексны-

ми коэффициентами (на примере системы двух уравнений). В гл. 5 рассматриваются методы вычислений собственных значений матриц. Дается геометрическая интерпретация проблемы собственных значений. Различаются прямые и итерационные методы определения собственных значений. Из числа итерационных методов излагаются метод степеней или метод итерации собственных векторов, в предположении, что все элементарные делители рассматриваемой матрицы линейны, а также распространение этого метода на матрицы, имеющие элементарные делители различных степеней. Кроме того, рассмотрен метод итерации собственных значений и метод одновременных итераций собственных векторов и собственных значений. Среди прямых методов излагаются методы Ланцоша, Данилевского, Крылова, Леверрье. В дополнении приводятся числовые примеры, иллюстрирующие применение ряда изложенных в книге методов вычисления корней алгебраических и трансцендентных уравнений и решение системы двух уравнений. В конце каждой главы приводится обширная библиография. Г. И. Бирюк

6 В259 К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. Саульев В. К. М., Физматгиз, 1960, 324 стр., илл., 9 р. 25 к.

Книга содержит обширный материал как по разностным уравнениям, аппроксимирующим дифференциальные уравнения в частных производных параболического типа, так и по методам их решения. По охвату материала книга является одной из наиболее полных в мировой математической литературе (библиография охватывает 208 названий по 1959 г. включительно), а по трактовке — весьма современной. Аппроксимирующие формулы и методы их использования рассматриваются главным образом с точки зрения применения их для вычислений на электронных вычислительных машинах. В связи с этим большое внимание уделяется вопросам устойчивости, имеющим, как известно, чрезвычайно большое значение при использовании электронных вычислительных машин. Даются также оценки числа операций, необходимого объема памяти, времени, работы машины. Поскольку автору принадлежит ряд новых методов численного решения дифференциальных уравнений в частных производных, повышения точности решений и оценки погрешностей, в книге изложено много нового материала, принадлежащего самому автору. В ряде случаев приводятся примеры решения задач, дающие наглядное представление о характере вычислений, ходе вычислительного процесса и достигаемых результатов. Изложение строгое, ясное и подробное, дающее возможность использовать книгу и как учебное пособие, и как весьма ценный справочник. Д. Ю. Панов

См. также: 6А474, 6Б339, 6Б378, 6Б382, 6В134

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

6 В260. Система счисления Колсона. Haward L. R. C. The Colson notation. «Automat. Data Process.», 1960, **2**, № 8, 25—27 (англ.)

Описывается система счисления, в которой для изображения чисел используются положительные и отрицательные цифры, по абсолютной величине не превышающие 5. Изображение отрицательных цифр производится перевертыванием соответствующих арабских цифр. Величины —5, —4, —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 и их изображения $\varsigma, \mathfrak{h}, \varepsilon, \mathcal{Z}, \mathrm{I}, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ известны как шкала Колсона. Числа 6, 7, 8, 9, 10 изображаются как $1\mathfrak{h}, 1\varepsilon, 1\mathcal{Z}, 11, 10$. Система Колсона является эффективным компромиссом между десятичной и двоичной системами счисления и дает простой и быстрый метод умственного подсчета при суммировании — операции, наиболее часто встречающейся в статистической обработке данных. Опыты, проведенные в Университете, показали, что после 5-минутного объяснения время на суммирования в системе Колсона было приблизительно вдвое меньше времени, требуемого для выполнения тех же операций в общепринятой системе. Как иллюстрация среднее время для подсчета суммы цифр от 1 до 30 было 47,6 сек., применяя систему Колсона, и 78,4 сек., используя общепринятые методы суммирования. Г. И. Гришаков

6 В261. Введение в троичную систему счисления. Morris D. J., Alexander W. An introduction to the ternary code number system. «Electronic Engng», 1960, **32**, № 391, 554—557, 592, 600 (англ.; рез. франц., нем.)

Статья дает некоторые сведения об операциях над числами, представленными в троичной форме. Троичная система может дать некоторое уменьшение количества оборудования по сравнению с двоичной системой. В статье подробно описывается процесс преобразования из двоичной и десятичной системы в троичную. В статье описывается также код, в котором в качестве цифр используются —1, 0, +1. Математические операции в таком коде проще и их легко осуществить с помощью логических цепей. Можно построить переключательные и запоминающие схемы, имеющие три состояния равновесия. Описывается принцип действия переключательной схемы, построенной на двух сердечниках с прямоугольной петлей гистерезиса. В качестве запоминающего устройства можно применять матрицу особой конструкции, имеющей два сердечника на один троичный разряд. Матрица работает по принципу совпадающих токов.

С. А. Раскутин

6 В262. Алгебра периодически изменяющих во времени свою структуру линейных преобразователей двоичных последовательностей. Huffman David A. An algebra for periodically time-varying linear binary sequence transducers. «Proc. Internat. Sympos. Theory Switch. (Apr., 1957). Part 1. Cambridge, Mass., Harvard Univ. Press.», 1959, 189—203 (англ.)

Линейный фильтр двоичной последовательности представляет собой синхронный фильтр, входами и выходами которого являются упорядоченные последовательности двоичных символов (например, нулей и единиц). В общем случае каждая цифра выходной последовательности фильтра, не изменяющего свою структуру во времени, является суммой по модулю 2 произвольно выбранных предыдущих выходных цифр Z и настоящих и предыдущих входных цифр X. Зависимость вход-выход такого фильтра представляется через оператор единичной временной задержки D. «Передаточный коэффициент» $T=\frac{Z}{X}$ при этом выражается отношением многочленов вида $D^n+D^{n-1}+\ldots+D+1$. Применение алгоритма Евклида позволяет выделить общие множители для числителя и знаменателя передаточного коэффициента и тем самым упростить структуру синтезируемого фильтра. Определение общих множителей соответствует определению эквивалентных состояний в таблице переходов. Характеристика вход-выход линейного фильтра может быть определена по выходной реакции фильтра на входной «импульс», т. е. последовательность, состоящую из одной единицы среди нулей. Если импульсная характеристика двоичного фильтра становится в конце концов последо-

вательностью, сплошь состоящей из нулей, или периодической последовательностью, то для такого фильтра существует реализация, требующая только конечного числа элементов задержки. Возможны различные методы схемной реализации фильтров. Наиболее простой и дающей минимум возможного числа задержек является «цепная» реализация. Цепная реализация фильтра, инверсного данному, заключается в простой замене местами входа и выхода. Многие схемы для создания избыточности в двоичной последовательности включают в себя неявно выраженное разделение цифр в последовательности на подпоследовательности фиксированной длины (блоки) и последующую обработку цифры в соответствии с ее положением в блоке. Такого рода операции над последовательностями, а также операции по созданию и преобразованию импульсных посылок наиболее просто могут быть представлены алгеброй, в которой зависимость операций от периодического времени является неотъемлемой частью алгебры. *C*-оператор введен для учета указанной зависимости. Определены основные связи, использующие *C*-оператор и *D*-операторы. *C*- и *D*-операции некоммутативны, ассоциативны и дистрибутивны. Приведены примеры упрощения алгебраических выражений и преобразования выражений для передаточных коэффициентов. Некоторые трудности состоят в том, что алгоритм Евклида в данном случае непригоден, так как здесь степень произведения полиномов не обязательно равна сумме степеней полиномов-сомножителей. Алгебра полиномов временных задержек с *C*-операторами в качестве коэффициентов может быть использована для описания в форме передаточного коэффициента любого линейного двоичного фильтра, импульсные характеристики которого заданы для всех интервалов основного периода повторения и для которого каждая из импульсных характеристик становится в конце концов последовательностью нулей или периодической. Изложена методика синтеза фильтров при условии минимизации как числа задержек, так и числа *C*-элементов. П. П. Пархоменко

6 В263. Вычислительные машины с симпатическим программированием. Schmitt W. F., Tonik A. B. Sympathetically programmed computers. «Informat. processing. Paris — München — London», 1960, 344—348 (англ.; рез. франц., нем., русск., исп.)

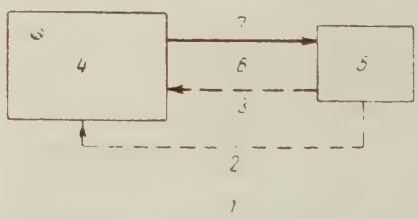
В очень большой вычислительной системе на программиста возлагается излишнее бремя вследствие большого числа различных устройств ввода-вывода, которыми надо управлять. Поэтому с технической точки зрения и с точки зрения программирования целесообразно разделить систему на отдельные автономные устройства, одно из которых в основном занимается операциями ввода-вывода. Показано, что система является наиболее эффективной, когда указанное выше устройство является универсальным устройством с программным управлением. Изучение систем, включающих подобное устройство, приводит к общему представлению о симпатическом программировании, при котором координация отдельных элементов осуществляется без применения непосредственных междублочных команд или блокировок. Такая координация обеспечивает высокоэффективное использование элементов системы, так как позволяет одновременно выполнять несколько программ. Рассматриваются логические аспекты такой системы и выдвигаются требования к отдельным элементам. Обсуждается проблема распределения функций между различными устройствами и определение их общих структур управления. Кратко описывается вычислительная система ЛАРК как специфический пример такой системы, который может иллюстрировать частные решения для главных проблем, возникающих при осуществлении симпатического программирования. Резюме авторов

6 В264. Новый подход к быстродействующей логике. Rowe W. D. A new approach to high-speed logic. «Proc. West. Joint Comput. Conf., San Francisco, Calif.», 1959. New York, 1959, 277—283 (англ.)

Описывается несколько модификаций логического элемента НЕ—ИЛИ (НИ), представляющего собой «веер» сопротивлений, соединенный с базой транзисторного усилителя постоянного тока с нагрузкой в коллекторе; при подаче низкого напряжения хотя бы через одно из входных сопротивлений транзистор входит в насыщение. Низкий уровень напряжения на коллекторе (когда триод заперт) стабилизируется либо с помощью опорного диода, либо с помощью транзистора *n-p-n*, включенного специальным образом. Перегрузку основного триода по базе можно предотвратить включением кремниевого диода, параллельного эмиттерному переходу триода. При этом элемент может иметь до 25 входов и работать на входы до 25 других элементов. Время переключения (при использовании микросплавных триодов) порядка 80 нсек. Большое количество входов и выходов позволяет строить из элементов НИ параллельно-параллельную логику (все операции выполняются параллельно и все члены любой переключательной функции формируются параллельно). При этом в схеме формирования любой переключательной функции может быть не более двух ступеней. В качестве примеров рассматриваются параллельно-параллельный 20-разрядный сумматор с временем срабатывания 320 нсек. (две ступени по 80 нсек. на образование сигналов переноса и 2 ступени на образование суммы) и реверсивный счетчик импульсов. М. А. Карцев

6 В265. Объединение вычислительных машин в общую схему для уменьшения времени решения задачи. Leiner A. L., Notz W. A., Smith J. L., Weinberger A. Organizing a network of computers to meet deadlines. «Proc. East. Joint Comput. Conf. (1957, Washington, D. C.). New York, N. Y., Inst. Radio Engrs, Inc.», 1958, 115—128 (англ.)

При организации совместной работы нескольких вычислительных машин над одной задачей возникает ряд новых проблем. Рассматриваются три важнейших типа проблем: оценка эффективности совместной работы и на-



1— блок-схема системы из двух машин; *2*— сигналы выполнения работы; *3*— результаты работы; *4*— первичная вычислительная машина; *5*— вторичная вычислительная машина; *6*— передачи данных; *7*— сигналы задания работы

хождение оптимальных параметров в программировании взаимных обменов данными; основные принципы согласования работы различных вычислительных машин друг с другом; построение системы команд для задания работы системы; не слишком усложняющей работу программиста. На рисунке приведена блок-схема системы из двух программноуправляемых машин, различающихся по их роли в организации взаимного обмена. Первичная машина (п. м.) является инициатором, посылая время от времени сигнал, задающий для вторичной машины (в. м.) определенный вид работы, причем п. м. продолжает вычисления, не требующие использования результатов вычислений, выполняемых в. м. в данный момент. Рассматривается несколько динамических моделей системы, отличающихся поведением в. м. после выполнения заданной ей работы. Основу составляют две динамические модели. В первой в. м. после окончания работы посылает сигнал «работа завершена» в п. м. и останавливается.

Как только п. м. достигает удобной точки в своей программе, после получения сигнала от в. м., она вырабатывает сигнал опроса в. м. и немедленно принимает данные от в. м. После приема данных в. м. ждет другого сигнала задания работы со стороны п. м. Эта последовательность сигналов повторяется. Для многих применений такая простая модель является вполне удовлетворительной. Однако в тех случаях, когда п. м. после посылки сигнала задания работы может работать лишь очень ограниченное время, более выгодна другая организация работы, учитывающая длительность выполнения работы в. м. Задание работы для в. м. осуществляется так же, как и выше, затем через определенный интервал времени, примерно равный средней длительности выполнения работы в. м., п. м. вырабатывает сигнал опроса. Если работа еще не выполнена к этому моменту, п. м. ждет окончания выполнения, если в. м. оканчивает работу раньше сигнала опроса, она ждет этого сигнала. Другие модели получаются из предыдущих, если допустить, что в. м. может принимать несколько сигналов задания работы без отсылки результатов предыдущей работы. В этих случаях необходимо принимать специальные меры предосторожности для исключения одновременной остановки первичной и вторичной в. м. Рассматриваются методы оценки «продуктивности» различных моделей для различных значений некоторых основных параметров. С увеличением количества сигналов задания работы, задаваемых в. м. до отсылки результатов предыдущих заданий, резко увеличивается количество состояний, в которых может находиться система, и сложность задания правильной последовательности работы при некоторых комбинациях сигналов. Поэтому уже при допущении небольшого количества сигналов требуется разработка систематических методов для обеспечения правильной очередности работы, облегчающих работу программиста при написании программы. Для этого предлагается использовать матричное представление соотношений очередности, позволяющее на основе предписанных программистом соотношений очередности определять путем матричных преобразований все возникающие неявные соотношения очередности. Это позволило бы использовать для этих целей саму вычислительную машину. На конкретном примере показывается нахождение неявных соотношений очередности. Возможная организация системы управления рассматривается на примере строящейся в Национальном Бюро Стандартов вычислительной системы, состоящей из двух программноуправляемых машин, одна из которых имеет ограниченные возможности. Синхронизация работы двух машин осуществляется введением специального признака в командах и специальных команд. Помеченные с помощью специального признака команды должны выполняться после выполнения определенных «ключевых» команд программы в. м. Помеченные команды соответствуют упомянутым выше сигналам опроса. При достижении помеченной команды управление дальнейшей последовательностью работ передается программе в. м. и определяется дополнительной информацией в специальных командах «регулирования последовательности». Приводится примерная кодировка команд «регулирования последовательности». Команда особого состояния позволяет определять дальнейшие действия в случае переполнения (при операциях с фиксированной запятой) и переполнение порядка (при операциях с плавающей запятой).

В. И. Смирнов

6 В266. Схема сокращения времени умножения. Хетагуров Я. А. В сб. «Вычисл. техника». М., Атомиздат, 1960, 48—52

В наиболее простом виде арифметическая операция умножения выполняется при помощи последовательных операций суммирования и сдвига. В таком случае время умножения выражается как $t_у = (t_{см} + t_{сд})\,p$, где p есть количество разрядов в множителе. Если начинать умножение со старших разрядов, то удается совместить операцию суммирования и операцию сдвига, тогда время умножения уменьшится в $\left(1 + \frac{t_{сд}}{t_{см}}\right)$ раз. При некотором осложнении оборудования можно за один такт выполнять умножение на два разряда. Это осуществляется двумя способами. При первом способе перед выполнением операции умножения заготавливается произведение множимого на 11. Последовательно анализируются пары разрядов множителя. Если это 00, то произведение сдвигается на два разряда. Если это 01, то к частному произведению прибавляется множимое, а затем результат сдвигается на 2 разряда. Если это 10, то к частному произведению прибавляется множимое, сдвинутое на один разряд, а полученный результат сдвигается на два разряда. Если это 11, то к произведению прибавляется заготовленное произведение, результат сдвигается на 2 разряда. При втором способе используется специальная таблица умножения, если в предыдущем такте множимое умножалось на 11. При умножении на 2 разряда время умножения уменьшается в $1\Big/\left(1 - \frac{t_{см}}{2(t_{см}+t_{сд})}\right)$ раз. В статье рассматривается возможность одновременного умножения на три разряда. При этом умножение на коды 000, 001, 010, 011, 100, 110 выполняется так же, как и при умножении на два разряда. Для умножения на коды 101 и 111 предлагается использовать специальную таблицу. Для реализации этого метода умножения необходим дополнительный регистр, в котором хранится частное произведение множимого на код 11, образующееся во время подачи множителя из запоминающего устройства; оно подается на сумматор, где образуется произведение, в прямом или обратном коде. При умножении младших разрядов время умножения сокращается в $1\Big/\left(1 - \frac{2t_{см}}{3(t_{см}+t_{сд})}\right)$ раз, а при умножении со старших разрядов в $\left(1 + \frac{3t_{сд}}{t_{см}}\right)$ раз.

С. А. Раскутин

6 В267. Влияние времени обращения к памяти на процесс сортировки в цифровых вычислительных машинах. Windley P. F. The influence of storage access time on merging processes in a computer. «Comput. J.», 1959, **2**, № 2, 49—53 (англ.)

Дается анализ процессов сортировки в вычислительной машине. Процесс сортировки заключается в образовании некоторой последовательности чисел, упорядоченных по определенному правилу, из двух или более числовых последовательностей, образованных согласно тому же правилу. Приводится формула подсчета времени, необходимого для образования одной последовательности. Указываются способы уменьшения времени сортировки. Указывается, что приведенные результаты полезны для определения требований к логической структуре будущих машин, которые в большой степени будут использоваться для сортировки.

Н. Н. Поснов

6 В268. О вычислении тригонометрических функций в электронных цифровых машинах. Назаров И. А., Смирнов Н. А. «Изв. Ленингр. электротехн. ин-та», 1959, **39**, 148—152

Описывается входное устройство, при помощи которого в специализированной машине можно произвести приведение произвольного аргумента к значению, меньшему $\pi/2$ или $\pi/4$. После этого аргумент передается в арифметическое устройство для вычисления синуса по известной программе.

С. А. Раскутин

6 В269. Дешевая вычислительная машина «Монробот Марк XI»—. The Monrobot Mark XI: a low-priced computer. Office, 1960, **51**, № 4, 148, 151 (англ.)

Фирма «Монроэ Калькулейтинг Машин» сообщает о выпуске полупроводниковой вычислительной машины «Монробот Марк XI». Машина размещается в тумбе

письменного стола, весит 136 *кг*, не требует охлаждения и может быть включена через электророзетку. Информация в буквенной и цифровой форме может быть введена и выведена посредством перфоленты, перфокарт, пишущей машинки и телетайпа. Магнитный барабан, вращающийся со скоростью 5200 оборотов в 1 мин., имеет 1024 регистра, каждый из которых содержит одно число или две команды. Тактовая частота магнитного барабана 160 *кгц*. Средняя скорость машины 5000 операций в 1 мин. Стоимость 24500 долл. О. В. Бачин

6 В270. Транзисторная цифровая автоматическая вычислительная машина «Keio Mark I». Kitagawa Misao, Tsuzuki Togo. Transistorized digital automatic computer Keio Mark I. «Proc. Fujihara Mem. Fac. Engng Keio Univ.», 1959, **12**, № 45, 98—113 (англ.)

В статье описывается транзисторная цифровая вычислительная машина «Keio Mark I», построенная в середине 1959 г. Машина предназначена для проведения исследований по программированию некоторых задач математики, техники и промышленности, а также для подготовки программистов. Машина работает в десятичной системе счисления. Каждая десятичная цифра кодируется четырьмя двоичными разрядами (код 8—4—2—1); кроме того, имеется один контрольный разряд. Размер слова 12 десятичных разрядов, включая знак. Машина построена по последовательно-параллельному принципу. Команда может иметь одно- и двухадресную структуру. Частота синхронизирующих импульсов 200 *кгц*. Операции выполняются с фиксированной и плавающей запятой. При выполнении операций с фиксированной запятой сложение и вычитание осуществляются за 0,36 *мсек.*, умножение за 7,56 *мсек.*, деление за 8,64 *мсек.*, сравнение за 0,12 *мсек*. При выполнении операций с плавающей запятой сложение и вычитание осуществляются за 0,72 *мсек.*, умножение за 6,36 *мсек.*, деление за 9,24 *мсек*. В статье подробно описывается система представления чисел и кодирования команд. Разбирается работа арифметического устройства с фиксированной и плавающей запятой. Выполнение всех операций разбивается на 2 стадии. В стадии 1 осуществляется поиск очередной команды и считывание ее в регистр команд. В стадии 2 код операции передается на дешифратор, а адрес в схему совпадения запоминающего устройства; после выполнения операции возникает импульс окончания и снова устанавливается стадия 1. При пуске машины автоматически устанавливается стадия 1 и выполняется вводная подпрограмма, хранимая на магнитном барабане; она дает возможность ввести в машину данные с перфоленты. Затем начинается выполнение основной программы. В качестве запоминающего устройства используется скоростной магнитный барабан, на котором имеется 60 головок для информации и 2 головки для записи синхронизирующих импульсов. На каждой дорожке записывается 1200 двоичных разрядов. Емкость памяти 1200 слов. Устройства входа и выхода состоят из магнитофона, устройства считывания данных с перфоленты и устройства вывода результатов на перфоленту. Машина построена на 900 транзисторах и 11 200 германиевых диодах.

С. А. Раскутин

6 В271. Вычислительная машина «Бендикс G-20». The Bendix G-20 computer. «Computers and Automat.», 1960, **9**, № 4, В 4—В 5 (англ.)

Вычислительная машина «Бендикс G-20» в 2 раза превосходит по быстродействию любую из имеющихся на рынке цифровых вычислительных машин, а стоимость ее составляет только половину от обычной стоимости большой цифровой машины. Она может производить до 45 000 операций в 1 сек. Стоимость аренды этой машины составляет 10 000 долл. в месяц. Центральная часть машины имеет ширину 1,67 *м*, высоту 1,52 *м* и глубину 0,71 *м*. Машина построена на полупроводниковых элементах и насчитывает в своем составе до 5000 транзисторов и 30 000 диодов. Первые поставки машин G-20 предполагались на январь 1961 г. И. Д. Алимов

6 В272. Вычислительная машина, построенная полностью на транзисторах—. All-transistorized computer, «Electr. Engng», 1960, **79**, № 8, 653 (англ.)

Краткие сведения о машине ИБМ-7070 (РЖМат 1959, 10537) в связи с поставкой ее фирме «Texas Instruments, Inc.» С. А. Раскутин

6 В273. Оценка некоторых типов двоичных сумматоров с двумя слагаемыми. Sklansky J. An evaluation of several two-summand binary adders. «IRE Trans. Electronic Comput.», 1960, **9**, № 2, 213—226 (англ.)

В статье приводится логика и основные принципы действия некоторых сумматоров и делается оценка их совершенства. Рассматривается пять типов двоичных сумматоров: простой последовательный сумматор, простой параллельный сумматор, сумматор с независимым и зависимым переносом, сумматор с дистанционным переносом, сумматор с условной суммой. Промежуточное место между такими сумматорами занимают различные типы последовательно-параллельных сумматоров. Для оценки совершенства сумматоров предлагается применять формулу $\eta = n/\tau \log_2 G$; здесь η есть эффективность сумматора, G есть число двухвходовых элементов И и ИЛИ, τ есть число элементов, входящих в наиболее длинную последовательную цепь, n есть максимальное число разрядов в слагаемом. С. А. Раскутин

6 В274. Печатные матрицы из диодов и сопротивлений. Ч. I. Schubert E. J. Printed diode and resistor matrices. Part 1. «Electron. Inds», 1959, **18**, № 12, 75—78 (англ.)

Кратко рассматривается необходимость применения в цифровых системах устройств постоянной «памяти», современное их состояние и технические требования к таким устройствам. Указывается, что описываемые в статье изготовляемые печатным способом матрицы двух видов наиболее полно отвечают требованиям к устройствам постоянной «памяти». В отличие от ранее применяемых конструкций диодных матриц описываемые печатные матрицы не имеют отдельных диодов, а собираются так, что диоды образуются непосредственно из одного слоя полупроводника. Кратко описанная технология их изготовления основана на использовании метода горячей штамповки. На основание из специального термопластического материала без применения какой-либо адгезионной среды заштамповывается с одной или обеих сторон сетка из параллельных полосок алюминиевой фольги, покрытой никелем. Никелевое покрытие используется для управления ростом кристаллов и ориентацией их в слое высокоочищенного селена, который наносится методом осаждения из парообразного состояния поверх никелевого покрытия. После нанесения слой селена проходит термическую и электрическую формовку, в результате чего образуется запирающий слой. Селен наносится полосками, расположенными перпендикулярно полоскам алюминиевой фольги. Поверх полосок селена наносится слой термопластического изоляционного материала с заданным распределением перфораций. После стабилизации этого слоя поверх него наносятся полоски из легкоплавкого сплава (с температурой плавления порядка 100°—175°) перпендикулярно к полоскам слоя полупроводника. В результате получается матрица из диодов, которые могут работать при обратных напряжениях до 10 *в*. Для повышения диапазона рабочих напряжений диоды проходят старение или электрическую формовку под воздействием тока, пропускаемого в обратном направлении. Для повышения сопротивляемости действию внешних условий диодные матрицы обрабатываются специальными эмульсиями и растворами резины. Опытные образцы таких матриц имели плотность 2,5 соединения на 1 *см*^{2}, но эксперименты показали возможность повышения плотности до 10 соединений на 1 *см*^{2}. Проводились испытания диодных матриц при работе с им-

пульсными, синусоидальными и прямоугольными напряжениями при нагрузке на чисто активное сопротивление и на магнитные сдвиговые регистры. При работе с регистром полоса пропускания частот составляла около 250 *кгц*. Оценивалась возможность каскадного соединения таких матриц, причем результаты эксперимента показали, что при каскадном соединении двух матриц постоянная времени имеет порядок 50 мксек., а при соединении трех матриц 90 мксек. Поэтому каскадные соединения матриц могут работать только в диапазоне частот менее 4 *кгц*. Как особое достоинство печатных диодных матриц указывается их малый входной импеданс, который позволяет применять их между магнитными регистрами на входе и выходе без промежуточных усилителей между кодирующей и декодирующей секциями.

И. Д. Алимов

6 В275. Бесконтактные релейные элементы на полупроводниках. Миллер Е. В. «Автоматика и телемеханика», 1960, **21**, № 7, 1035—1045 (рез. англ.)

Бесконтактные релейные устройства могут с успехом заменять контактные устройства в тяжелых условиях работы (при наличии пыли, грязи и т. д.). В статье описываются такие устройства, построенные на полупроводниках. Описаны логические элементы И, ИЛИ, КОМАНДА (аналогичный триггеру), работающие при температуре до +50°С, которые можно применять в сложных логических схемах. Приводится расчет таких элементов, указаны соображения по выбору полупроводниковых элементов.

С. А. Раскутин

6 В276. Применение транзисторов в быстродействующей вычислительной машине параллельного действия. Connett J., Cooke P. Transitor applications in a high-speed parallel computer. «Proc. Instn Electr. Engrs», 1959, **B106**, № 18, 1226—1234. Discuss., 1289—1291 (англ.)

Описывается применение транзисторов с диодными логическими схемами в качестве двоичных усилителей, двустатических элементов и переключателей в быстродействующей машине параллельного действия. Наиболее подходящим для логического усилителя является каскад с общим эмиттером, но из-за эффекта накопления неосновных носителей при насыщении транзистора ухудшается время его переключения. Приводятся ссылки на литературу и методы, позволяющие избежать насыщение транзисторов. Рассматривается наиболее перспективный способ — управление насыщением с помощью обратной связи, позволяющий избегать эффекта даже при большом разбросе коэффициента передачи тока. Разработанные схемы основных элементов обладают нужными свойствами, несмотря на недостатки современных триодов. Переходная характеристика усилителя имеет прямоугольный вид. Для него существенны коэффициент передачи тока и напряжения и возможность подключения на выход многих цепей. Практическая схема обратной связи отлична от схем, включающих диод для фиксации ненасыщенного потенциала коллектора, и содержит диод, который сводит базовый ток к нулю при прямом смещении на коллекторе. При полном насыщении в цепь обратной связи включается небольшое прямое смещение либо от постороннего источника через сопротивление, либо от эмиттерного потенциала, включенного на выходе эмиттерного повторителя. Более экономичной является схема без смещения на специальном низкоимпедансном диоде с узкокатодной конфигурацией. Однако так как эти диоды очень дороги, то в основном применяются первые две схемы. Схемы с емкостной связью, без логических ключей, используются как односторонние инверторы и являются более быстродействующими. Каскады с емкостной и логической связью объединяются, когда требуется логическое действие и его инвертирование. Временная характеристика такой пары не на много хуже одного логического каскада. Приведены блок-схемы. В схемах были использованы сплавные триоды с граничной частотой 5 *мгц*. Они давали время переключения менее 0,5 мксек. для быстрых цепей и 1,4 мксек. для медленных, когда каскадный выход был связан с 4 подобными схемами. На поверхностно-барьерных транзисторах с граничной частотой более 5 *мгц* получена каскадная задержка в 0,05 мксек. Допуски на компоненты схем были установлены в 5%. Двустатический элемент имеет схему управления насыщением, переключается положительными импульсами, что дает возможность использовать вышерассмотренные логические схемы и обеспечивает большую чувствительность триггера. Триггер срабатывает от импульсов длительностью 0,5 мксек., с частотой следования в 1 *мгц*. Был сконструирован арифметический блок в 44 разряда и счетчик с минимальным временем цикла в 1 мксек. Описывается также передача мощных импульсов в выбранную нагрузку через коммутирующий транзистор. На этом принципе построен высокоскоростной импульсный разделитель, управляющие цепи запоминающей матрицы на ферритах и схемы записи-считывания.

А. Ф. Мевис

6 В277. Использование транзисторов в цифровом корреляторе, обрабатывающем информацию радиолокатора. Cain A. L., Swift P., Watts A. T. The use of transistors in a digital correlator for processing radar information. «Proc. Instn Electr. Engrs», 1959, **B 106**, Suppl. № 16, 649—656. Discuss., 698—701 (англ.)

Цифровой коррелятор используется для улучшения отношения сигнал/шум, получаемого на выходе приемника радиолокатора кругового обзора. Для этого напряжение на выходе приемника, соответствующее отраженным сигналам на фоне шумов, преобразуется в цифровую форму. Сигнал «1» формируется, если видеосигнал превышает определенный порог. Цифровая информация, соответствующая каждому отдельному интервалу дальности, равному 462 *м* (1/4 морской мили), запоминается и суммируется с данными по тем же интервалам, полученными при действии последующих зондирующих импульсов. Всего таким образом собираются данные, соответствующие 4÷60 зондирующим импульсам. Затем производится подсчет числа «1» во всех кодах, соответствующих каждому интервалу дальности. Если полученное число «1» превышает критическое, то считается, что анализируемый сигнал является целью. Так как шумовые сигналы, полученные при следующих друг за другом зондирующих импульсах, не коррелируют, то рассмотренное выше цифровое интегрирование позволяет с помощью обработки информации от нескольких зондирующих импульсов радиолокатора выделять сигнал на фоне шумов. При максимальной дальности обнаружения, равной 256 морским милям и требуемой разрешаемой способности (0,25 морской мили), сигналы на выходе приемника, соответствующие каждому зондирующему импульсу, должны быть разделены во времени на 1024 интервала по 3,09 мксек. Информация по каждому такому интервалу, предварительно преобразованная в цифровую форму, запоминается в матричной памяти на ферритовых сердечниках. Специальные вычислительные устройства обрабатывают хранимую информацию по каждому интервалу дальности за заданное число зондирующих импульсов и определяют наличие цели и ее точный азимут. В связи с тем, что используемые в запоминающем устройстве матрицы с управляющими схемами на транзисторах имеют полный цикл порядка 10 мксек., а требуемая разрешающая способность определяет период поступления информации 3,09 мксек., в корреляторе используются работающие поочередно 4 запоминающих и вычислительных устройства. Следовательно, время, отводимое для запоминания каждого принимаемого кода, составляет 12,5 мксек., из которых 5 мксек. используются и для подсчета «1». Все элементы коррелятора используют транзисторы типа ОС-44 или ОС-45 (всего около 5000 транзисторов). Подробно описываются схемы типовых и специализированных элементов. Высокостабильный L-C генератор формирует пачку импульсов, на-

чало которой соответствует зондирующему импульсу радиолокатора. Период повторения импульсов в пачке равен 3,09 мксек. и его точность (0,1%) сохраняется при изменении окружающей температуры в пределах +20°С÷+45°С. Преобразователь напряжения сигнала, действующего на выходе приемника, в цифровую форму состоит из двух последовательно соединенных каскадов дифференциальных усилителей, сигнал на выходе которых, достигая некоторой заданной величины, определяет срабатывание триггера Шмитта (триггера уровня). Каждое из 4 запоминающих устройств хранит 256 кодов по 36 разрядов. Матрицы используют сердечники FX 1948 с диаметром 2 *мм* и требуют для переключения импульсы тока 450 *ма* длительностью 3 мксек. и фронтами менее 0,5 мксек. Выбор одного из 16 координатных проводов матрицы производится диодно-транзисторным дешифратором, который использует переключение на базе последовательно соединенных транзисторов. В качестве типовой логической схемы в корреляторе используется двухкаскадное соединение диодных схем И—ИЛИ, разделенных эмиттерными повторителями или инверторами. Приводятся принципиальные схемы триггера с раздельными и счетным входами и блок-схемы устройств сравнения двух двоичных кодов и реверсивного счетчика, использующих типовые элементы. Приводятся краткие сведения о конструкции коррелятора.

А. Б. Залкинд

6 В278. Новый тип вычислительной машины—. New type of computer. «Electr. Manufacturer», 1960, **5**, № 1, 25 (англ.)

Сообщение о разработке отделением «Aeronutronic» фирмы «Ford Motor Company» малогабаритных сверхбыстродействующих усовершенствованных элементов BIAX электронной цифровой вычислительной машины. Элементы могут выполнять 10 миллионов операций в 1 сек. Элементы BIAX представляют собой небольшие прямоугольные ферритовые брусочки, размеры которых столь малы, что на ладони умещается 5000 штук. Диапазон рабочих температур — от 125° С до арктических холодов. Разработанные элементы могут заменять полупроводники — транзисторы и диоды. Сейчас в массовом производстве находятся два типа BIAX: запоминающий элемент и логический элемечт. Считается, что на ячейках BIAX можно строить информационные вычислительные машины, машины для управления спутниками и реактивными снарядами, для перевода с иностранных языков, информационные и другие машины. При изготовлении элементов BIAX используется печатный монтаж. На рисунке изображена плата с 300 элементами BIAX для запоминающего устройства вычислительной машины.

В. А. Брик

6 В279. Цельномагнитные цепи для синхронных последовательных вычислительных машин. Gianola U.F. Integrated magnetic circuits for synchronous sequential logic machines. «Bell System Techn. J.», 1960, **39**, № 2, 295—332 (англ.)

Рассматриваются некоторые устройства синхронных последовательных машин, выполненные на магнитных элементах с прямоугольной петлей гистерезиса. Предварительно разбирается работа переключателя на магнитном торе. Приводятся соотношения, определяющие время перемагничивания сердечника в зависимости от параметров перемагничивающего тока, свойств магнитного материала и условий нагрузки выходной обмотки. При объединении отдельных переключателей в логические схемы между входом одного и выходом другого необходимо включение полупроводникового прибора, являющегося развязкой. Устройства, собранные на таких элементах по стоимости и надежности, мало отличаются от полностью транзисторных, выполняющих те же логические операции. Применение многодырочных сердечников, трансфлюксоров (РЖМат, 1959, 8596), лэддиков (laddics) и магнитной ленты для построения логических цепей позволяет резко уменьшить объем полупроводникового оборудования. Анализируя работу цельномагнитных элементов, многодырочные сердечники заменяют комбинацией торов (перемычек), имеющих связь по магнитному потоку. Для зарисовки схем устройств используют метод зеркальных символов. В статье подробно описывается работа регистров сдвига, построенных на двухдырочных и трехдырочных трансфлюксорах и полосках магнитной ленты; шаговых переключателей на лэддике и магнитной ленте; устройства для получения временной последовательности кодов 000... 001, 000... 010, 000... 011,... 111...111. Приводятся фотографии и осциллограммы импульсов. Скорость работы регистра сдвига на трансфлюксорах определяется T_p — временем перемагничивания перемычек, находящихся в положении «1» (один такт). Сдвиг кода на 1 разряд производится за 2 такта, т. е. за $2T_p$. Данные регистров сдвига на серийных сердечниках, изготовляемых фирмами «RCA» и «General Ceramic», сведены в таблицу (см. таблицу). E_1, E_2, P_1, P_2, A_1, A_2 обозначают амплитудные значения ампервитков тактовых импульсов, полученных при использовании транзисторов 2N417 и 2N580.

Номер сердечника	E_1, ампервитки	E_2, ампервитки	$P_1=P_2=P_{max}$ амперитки	$P_1=P_2=P_{min}$ амперитки	$A_1=A_2$ амперитки	T_p мксек.
RCA-3665	0	0	0,58	0,46	9	8
	0,5	0	0,56	0,46	4	
RCA-3668	0	0	0,39	0,27	5	30
General Ceramic F-1023-S6	0	0	0,14	0,12	2,4	
	0	0	0,15	0,10	3	
	0,1	0	0,14	0,12	1,2	38
	0	0,1	0,21	0,12	3	

При конструировании логических схем на магнитной ленте используют свойство сохранения состояния устойчивого перемагничивания участка (сегмента), если длина сегмента больше некоторой критической величины, зависящей от ширины ленты, толщины ферромагнитного слоя и характеристик материала. Скорость работы таких устройств определяется временем перехода сегмента с неустойчивым перемагничиванием в первоначальное состояние. Отмечается, что логические цепи на цельномагнитных материалах требуют точного ограничения амплитуды управляющих токов и имеют коэффициент усиления потока меньше 1. Экспериментальный шаговый переключатель на лэддике имеет коэффициент затухания на 1 разряд 7%. В приложении к статье даются методы расчета параметров цепей описанных устройств. Библ. 26 назв.

Г. И. Гришаков

6 В280. Генератор случайных чисел. Isida Masatugu, Ikeda Hiroji. Random number generator. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1956, **8**, № 2, 119—126 (англ.)

Подчеркивается, что для успешного решения ряда задач статистики, особенно выборочного контроля, а также для реализации метода Монте-Карло целесообразно пользоваться устройствами, которые вырабатывают случайные числа и автоматически засылают их в электронную цифровую машину. Рассматривается принцип действия и устройство генератора случайных чисел. В качестве задающего физического случайного процесса выбрана последовательность импульсов, выдаваемых специальной трубкой, использующей радиоактивный распад кобальта — 60. Количество импульсов ζ, поступающих в течение фиксированного интервала времени, подсчитывается при помощи десятичного счетчика, содержащего в качестве основного элемента декатрон. В предположении, что ζ имеет распределение Пуассона с достаточно большим значением параметра λ, последние цифры чисел

ξ_i распределены приблизительно равномерно. Плотность потока импульсов, которая определяет величину λ, можно регулировать изменением расстояния между радиоактивным элементом и счетчиком. Получаемые таким образом случайные числа подвергались статистическим исследованиям. Основными проверками совокупности случайных чисел были: проверка равномерности распределения, проверка независимости последовательных элементов и проверка отсутствия периодичности. При значениях $\lambda > 50$ качество совокупности случайных чисел оказывается удовлетворительным. Рассматриваемый генератор случайных чисел рассчитан на сравнительно невысокие скорости работы. Н. П. Бусленко

6 В281. Быстродействующее фотографическое запоминающее устройство большой емкости. Lovell C. A. High-speed high-capacity photographic memory. «Proc. East. Joint Comput. Conf., Philadelphia, Pa, 1958». № T-114. New York, 1959, 34—38. Discuss., 38 (англ.)

Основными требованиями, предъявляемыми к оперативному запоминающему устройству являются: возможность быстрого считывания информации, большая емкость и низкая стоимость. В соответствии с этими требованиями фирмой «Белл» разработано фотографическое запоминающее устройство, которое на современном уровне разработки имеет следующие характеристики: Емкость 131000 76-разрядных слов или 10^7 двоичных разрядов; время считывания при произвольном доступе 5 мксек. на слово; время записи 10^7 разрядов 45 мин., время заполнения памяти из библиотеки плат 1—2 мин.; стоимость — порядка 0,5 цента на разряд емкости. Фотографическое запоминающее устройство хорошо приспособлено для хранения фиксированных подпрограмм, поэтому одним из основных применений в цифровых вычислительных машинах является использование такого запоминающего устройства для машинного перевода. В этом случае потребуется на поиск слова около 2 мсек., что, по мнению автора, обеспечит перевод со скоростью от 10 до 500 слов в 1 сек. Фотографическое запоминающее устройство может быть использовано также для решения логических задач, в телефонии, в управлении воздушным движением, уличным освещением и т. п.

Г. Х. Новик

6 В282. Быстродействующий аналого-цифровой преобразователь. D. M. Un convertisseur rapide analogique-numerique et numérique-analogique. «Electronique», 1959, № 157, 53 (франц.)

Дается краткое описание аппарата для преобразования информации из непрерывной формы в дискретную (цифровую) и наоборот из дискретной — в непрерывную. Аппарат выполнен на печатных схемах, работает на полупроводниках, компактен, потребляет мало энергии. Приведена фотография модели 4030, обеспечивающей связь между электронной машиной ИБМ-700 и моделирующим устройством ЭАИ (EAI). Модель содержит 20 каналов информации непрерывного типа и 10 каналов дискретного типа. Исключительной характеристикой этой системы является употребление 20 каналов, разделенных во времени для одного типа преобразователя. Скорость преобразования — более 400 сигналов в 1 сек. на любом канале; точность преобразования ±0,05%. Для увеличения гибкости программирования и облегчения контроля за работой преобразователя, предусмотрен ввод информации вручную в двух направлениях. С помощью неоновых индикаторов и измерительной аппаратуры осуществляется видимый контроль за выходом информации из любого канала. Управление программированием обеспечивается электронной вычислительной машиной, которая может записывать и прочитывать информации на различных каналах в любом порядке и в любое время. В. Л. Евтеев

6 В283. Классификация преобразователей непрерывной величины в числовой эквивалент. Заволокин А. К. В сб. «Теория и применение дискретн. автомат. систем». М., АН СССР, 1960, 314—322

Устройства преобразования непрерывной величины в числовой эквивалент предлагается классифицировать по методу преобразования. Тогда все многообразие преобразователей сводится к трем основным группам. К первой группе относятся преобразователи последовательного счета. Значению непрерывной величины соответствует последовательность импульсов, число которых подсчитывается на счетчике. Группа делится на преобразователи с промежуточным преобразованием и накопительные. В накопительных преобразователях импульс образуется, когда непрерывная величина изменяется на определенное малое значение. Накопительные преобразователи выполняются по замкнутой и разомкнутой схеме. В статье коротко поясняются возможности той или иной схемы. В преобразователях с промежуточным преобразованием непрерывная величина сначала преобразуется во временные интервалы или в частоту. В статье разбирается принцип работы обоих преобразователей, оцениваются возможности преобразователей последовательного счета. Ко второй группе относятся преобразователи считывания, в которые каким-либо способом введены все возможные числовые эквиваленты, из которых выбирается один, соответствующий данному значению непрерывной величины. Считывание числового эквивалента может происходить по всем разрядам одновременно (параллельные преобразователи) и последовательно, по одному разряду за один такт. Примером преобразователей считывания является кодовый диск, преобразующий угол поворота в числовой эквивалент. В таких системах двоичная система может привести к характерным ошибкам преобразования, поэтому более надежным является код Грэя, хотя он требует последующего перевода в двоичную систему. В статье описываются также некоторые другие типы преобразователей считывания. К третьей группе относятся преобразователи поразрядного кодирования. Они применяются только для преобразования электрических величин — токов и напряжений. Числовой эквивалент получается последовательным подбором двоичных разрядов. Преобразователь работает циклически, причем сначала получаются старшие разряды, что неудобно для последовательных машин. В статье кратко описываются некоторые типы таких преобразователей. Преимущество предложенной системы классификации состоит в том, что по типу преобразователя можно судить о его эксплуатационных качествах: быстродействии, помехозащищенности, фиксации нулевого уровня, цикличности и т. д.

С. А. Раскутин

6 В284. Предложения по классификации преобразователей аналоговой величины в цифровую. Гитис Э. И. В сб. «Теория и применение дискретн. автомат. систем». М., АН СССР, 1960, 323—325

В начале статьи подвергаются критике попытки классифицировать преобразователи аналог-цифра на электронные и электромеханические или по виду кода на выходе преобразователя. Такая классификация не вскрывает сущность самого процесса преобразования. Есть три метода измерения аналоговой величины: метод подсчета числа единичных приращений аналоговой величины, метод сравнения и вычитания, метод одного отсчета (метод пространственного кодирования). Эти методы предлагается положить в основу классификации преобразователей. Приведена полная структурная схема предлагаемой классификации преобразователей. Указываются основные отличия этой схемы классификации от схемы, предложенной А. К. Заволокиным (реф. 6В283). Правильный выбор признаков классификации позволит выявить законы построения и свойства того или иного преобразователя. Это облегчит работу над преобразователями в конкретных условиях применения.

С. А. Раскутин

6 В285. Линейные искажения при дискретизации непрерывных сигналов. Вол В. А. «Радиотехника», 1960, **15**, № 4, 36—41

Рассматриваются искажения, возникающие при дискретизации непрерывных сигналов в тех случаях, когда время дискретизации нельзя считать бесконечно малым, а закон изменения крутизны преобразователя произволен. Из резюме автора

6 В286. Об идеальном приеме сигналов в «целом». Пушной Б. М. «Электросвязь», 1960, № 5, 3—9

Рассмотрен простейший вариант скелетной схемы идеального взаимокорреляционного приемника и идеального приемника для кодов определенного типа. Найдено, что вероятность правильного приема распределена по нормальному закону. Показано, что взаимокорреляционный приемник с фиксированным уровнем ограничения не является идеальным. Резюме автора

6 В287. Фазоимпульсная аналоговая вычислительная машина. Bohn E. V. A pulse position modulation analog computer. «IRE Trans. Electronic Comput.», 1960, **9**, № 2, 256—261 (англ.)

Описываются цепи, устройства и структура аналоговой вычислительной машины, предназначенной для моделирования в реальном масштабе времени системы нелинейных дифференциальных уравнений. Особенностью машины является сочетание аналоговых и цифровых принципов в выполнении арифметических и функциональных операций. Необходимые начальные данные и результаты вычислений фиксируются на магнитном барабане. Числа задаются временными интервалами между постоянными канальными и переменными кодовыми импульсами. При считывании данных входные цепи устройств преобразуют временные интервалы в напряжения, пропорциональные величине интервалов (демодуляция). После выполнения операции выходные цепи производят обратное преобразование выходного напряжения во временной интервал (модуляция). Арифметические и функциональные устройства машины выполнены на стандартных элементах. К ним относятся: транзисторный триггер, вентиль на полупроводниковых диодах и сопротивлениях, операционный усилитель и транзисторный компаратор напряжений по схеме Шмидта. В машине применяются два типа арифметических устройств — суммирующие и множительные. Сумматор состоит из 6 элементов и производит последовательное сложение нечётного количества чисел. Множительное устройство содержит 9 элементов и перемножает два числа, подаваемых на вход одновременно. Точность выполнения арифметических операций определяется главным образом двумя типами элементов — операционным усилителем и компаратором. Операционный усилитель — это интегрирующий усилитель постоянного тока на электронных лампах. Для получения на выходе разнополярного напряжения применяется цепочка автоматического смещения на транзисторе. Напряжение смещения базы триода — 0,2 *в* является уровнем срабатывания для компаратора. Сочетание электронных ламп с полупроводниковыми приборами дало возможность получить погрешность интегрирования входного напряжения меньше 0,1%. Для образования нелинейных функций в машине применяются два способа, дающие разную точность воспроизведения. Первый способ очень простой и заключается в том, что графики функций фотографируются на высококонтрастную плёнку, которая закрепляется на цилиндре, вращающемся на одной оси с магнитным барабаном. Луч света, сфокусированный на плёнке, возбуждает фотоумножитель, расположенный внутри цилиндра. В момент пересечения лучом оси абсцисс и графика функции фотоумножитель вырабатывает импульс напряжения. Таким образом функции представляются временными интервалами последовательности импульсов. Второй способ более точен и гибок и применяется в тех случаях, когда функция задана аналитически или аппроксимирована линейными отрезками и параболическими дугами. На магнитном барабане записываются начальные условия (значения в нулевой точке функции, первой и второй производных), постоянные значения второй производной и координаты особых точек, где вторая производная обращается в нуль. Специальное устройство (функциональный генератор) производит двойное интегрирование и значения функции записываются на барабан для каждого канального импульса. Вычисление интеграла от нелинейной функции производит интегрирующее устройство, работающее по принципу интегратора цифрового дифференциального анализатора. Для уменьшения дрейфа, свойственного непрерывным элементам, операция производится по двум каналам. В точном аналоговом канале выполняется суммирование. Грубый цифровой канал подсчитывает количество переполнений точного канала. В статье приведены блок-схема и данные специализированной фазоимпульсной вычислительной машины для моделирования системы дифференциальных уравнений

$$\frac{du_j}{dt} = \sum_{k}^{m} \{f_k(x)\, g_k(y) + h_k(z)\} + \text{дополнительные данные}$$

$(j=1,2,\ldots,n)$, где время t рассматривается как параметр, x, y, z — независимые переменные, f_k, g_k, h_k — нелинейные функции (при моделировании полета самолета это число M, высота и истинная воздушная скорость). Информация хранится на небольшом магнитном барабане, поверхность которого поделена на 15 каналов. Величина одного канала 1000 мсек. За это время с синхродорожки считывается 104 тактовых импульса, которые просчитываются на двух газоразрядных десятичных лампах и четырех триггерах. Две счетные лампы дают квантованные положения импульсов от 1 ÷ 100, которые выбираются с помощью двух десятичных переключателей. Отдельные каналы и дорожки выбираются переключателями, на которые подаются строб-импульсы, получаемые с фотодиодов и кодированного диска, установленного на барабане. Точность операции запись-считывание составляет 0,03%. Программа вычислений задается на наборной панели, которая коммутирует требуемую последовательность канальных вентилей к арифметическим и функциональным устройствам. Полная программа выполняется за один оборот барабана.

Г. И. Гришаков

6В288. Малогабаритное аналоговое вычислительное устройство на транзисторах RAT-700. Walter A. Der volltransistorisierte Tischanalogrechner RAT 700. Telefunken-Ztg, 1960, **33**, № 127, 26—33, 72, 76 (нем.; рез. англ., франц.)

Описано электронное аналоговое устройство постоянного тока. Последнее дает определенную гибкость и универсальность по отношению к подобным устройствам на переменном токе при более низкой стоимости. Выполнение аналога RAT-700 полностью на транзисторах выгодно отличает его от предшественника, лампового аналога RA-463. Это, например: значительно меньший объем и вес (меньший в 6 с лишним раз), а также все те отличия, которые основаны на достоинствах транзисторов по сравнению с лампами. Для RAT-700 принят блочный принцип исполнения, причем количеством большинства типов решающих элементов можно в некоторых пределах варьировать. Кроме того, в случае необходимости, можно включать для совместной работы несколько таких аналогов. Основные элементы — операционные усилители могут служить как сумматоры или интеграторы. С применением транзисторов трудности, связанные с дрейфом нуля, повышаются. Применена прерывистая стабилизация с помощью усилителя переменного тока. При интегрировании с $\tau = 1$ сек. ошибка на выходе через 1000 сек. составит всего 0,5%. Для установки постоянных коэффициентов применены 20 потенциометров. Перемножение двух величин производится с помощью мультипликатора, который использует формулу

$$z = x \cdot y = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2].$$

Парабола имеет кусочно-линейную аппроксимацию (6 подпорных диодов). В функциональном блоке на диодах образуются специальные функции: гистерезис, ступенчатая функция, зона нечувствительности и др. Наблюдение переходного процесса ведется на экране осциллографа. Кроме того, имеются двухкоординатный самописец и приспособление для фотографирования. Библ. 8 назв. В. В. Иванов

6 В289. Малое моделирующее устройство.—. Kleiner Analogrechner. «Regelungstechnik», 1960, **8**, № 3, 108—109 (нем.)

Сообщается о выпуске фирмой «Electronic Associates» портативного моделирующего устройства TR-10, построенного полностью на полупроводниковых элементах. Устройство лишь немногим превышает габариты электрифицированной пишущей машинки, имеет точность 0,1% и может применяться для инженерных расчетов в области автоматики, электрических цепей, регулирования воздушного транспорта и т. п. В состав устройства входят минимум 10 операционных усилителей, однако при необходимости их количество может увеличиваться до 20. Одни и те же элементы могут применяться для выполнения различных операций: суммирования, интегрирования, умножения, деления, генерирования функций и логического сравнения. И. Д. Алимов

6 В290. Транзисторный усилитель постоянного тока для моделирующих устройств. Cundall C. M., Saggerson J. K., Shaw G. A transistor d. c. amplifier for use in analogue computers. «Proc. Instn Electr. Engrs», 1959, **B106**, № 18, 1354—1364. Discuss., 1394—1398 (англ.)

Подробно анализируются общие характеристики суммирующего и интегрирующего операционных усилителей постоянного тока, собранных на транзисторах, и выводятся формулы для определения их переходных и частотных характеристик. Приводится основанный на теоретическом исследовании перечень требований к конкретным характеристикам усилителей. Для получения точности решения 0,1% при сопротивлении обратной связи 1 *Мом* суммирующий усилитель должен иметь переходный импеданс более 1000 *в/мка*, это позволит получить в замкнутой схеме коэффициент усиления 10 при входном сопротивлении 100 *ком*. При таком же сопротивлении обратной связи для того, чтобы дрейф нуля не превосходил 1 *мв*, требуется иметь дрейф входного тока усилителя не более 10^{-9} *а*. Номинальная нагрузка принимается равной 10 *ком* и диапазон выходных напряжений до ±30 *в*. Подробно описывается с приведением электросхем и параметров схемных элементов разработанный усилитель постоянного тока, который собран на 5 транзисторах и имеет стабилизирующие цепочки для повышения стабильности работы и полосы пропускаемых частот. Рассматриваются 3 способа корректировки дрейфа и подробно анализируется примененный в усилителе способ, основанный на использовании двух усилителей: обычного усилителя и усилителя со сниженным дрейфом за счет модуляции тока. Описанный усилитель имеет полосу пропускания частот при применении его в качестве инвертора с сопротивлением 100 *ком* и 1 *Мом* в цепи обратной связи 400 и 18 *кгц*, соответственно, причем сдвиг по фазе на частоте 100 *гц* в обоих случаях не превосходит 0,1°. Переходная характеристика при таких же сопротивлениях в цепи обратной связи характеризуется тем, что пропускание прямоугольных колебаний с частотой 500 *гц* происходит без заметных искажений. Усилитель обеспечивает изменение выходного напряжения в диапазоне ±30 *в* на нагрузке 10 *ком*. При чисто емкостной нагрузке неустойчивость проявляется при емкости 0,15 *мкф*, если сопротивление обратной связи равно 100 *ком*, или при 0,05 *мкф*, если сопротивление обратной связи равно 1 *Мом*. Выходное напряжение содержит шумы с частотой 50 и 100 *гц*, не превышающие 4 *мв* при сопротивлении обратной связи 1 *Мом* или 0,7 *мв* при более часто употребляющемся сопротивлении обратной связи 200 *ком*. В лабораторных условиях дрейф нуля за 8 часов, отнесенный к входу, составляет 10^{-9} *а*, что эквивалентно дрейфу 200 *мкв* при сопротивлении обратной связи 200 *ком*. Для питания требуются стабилизированные источники напряжения ±50 *в*, —30 *в* и ±6 *в*. Потребляемая мощность менее 0,7 *вт*. Габариты усилителя характеризуются тем, что на шасси размером 480 *мм* устанавливается 14 таких усилителей вместо 5—6 аналогичных усилителей, собранных на электронных лампах. Экономичность по потребляемой мощности характеризуется тем, что аналогичные усилители на электронных лампах потребляют по 35 *вт*. Библ. 11 назв. И. Д. Алимов

6 В291. Использование кольцевой схемы из диодов в качестве четырехквадрантного блока перемножения (переменных). Wilcox Richard H. Use of a diode ring as a four-quadrant multiplier. «Rev. Scient. Instrum.», 1959, **30**, № 11, 1009—1011 (англ.)

Подробно рассматривается возможность применения кольцевой схемы из четырех полупроводниковых диодов (см. рисунок) для перемножения аналоговых сигналов, имеющих вид напряжений. При включении в такую схему диодов с аналогичными вольтамперными характеристиками, которые для полупроводникового диода могут аналитически выражаться формулой $i = A(e^{\gamma u} - 1)$ (где A, γ — характеристические коэффициенты диода), через сопротивление нагрузки протекает ток, пропорциональный произведению поданных в схему напряжений, и поэтому напряжение на сопротивлении нагрузки равно:

$$e_0 = -\frac{1}{\gamma}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{m+1}}{m}\left[\frac{2AR\gamma^{(2n+1)}}{(2n)!\,(2n+1)}\right]^m \times \right.$$
$$\left. \times [(e_1+e_2)^{2n} - (e_1-e_2)^{2n}]\right\}$$

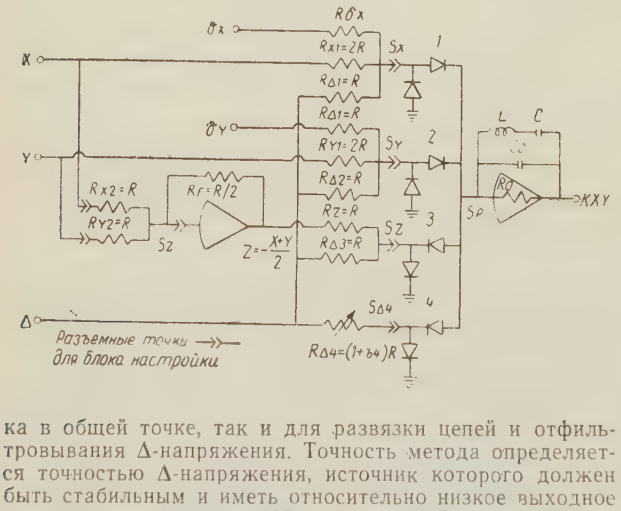
при $\gamma(u + i_0 R) < 0{,}5$ и $\gamma i_0 R \ll 1$ $e_0 \approx \frac{4}{3} A\gamma^2 R e_1 e_2$.

Приводятся результаты эксперимента, при котором использовались диоды с одинаковыми характеристиками: $A = 12\times10^{-6}$ *а* и $\gamma = 17$ $в^{-1}$. На кольцевую схему подавалось напряжение от звукового генератора с частотой 1600 *гц* через разделительные звуковые трансформаторы с коэффициентом трансформации 1 : 1. Сопротивление нагрузки варьировалось от 200 *ком* до 200 *ом* и измерялась переменная составляющая с частотой 3200 *гц*, которая для такой схемы возведения в квадрат являлась основной. Опыт показал, что такая схема имеет наиболее высокую точность при сопротивлении нагрузки 500 *ом*. В диапазоне от 10 до150 *мв* входного напряжения точность возведения в квадрат составляла 1%, а в диапазоне до 250 *мв* 2%. Схема работала при входных напряжениях до 300 *мв*, причем указывается, что верхний предел входных напряжений зависит от формы вольтамперной характеристики диодов при обратной полярности, которая обычно имеет возрастание крутизны при обратных напряжениях порядка нескольких сотен *мв*. Исследовалось влияние несимметричности схемы и изменений температуры. При включении диодов с коэффициентами A, отличающимися в 2 раза, и коэффициентами γ — в 1,5 раза, влияние несимметричности сказывается только при уровнях входных сигналов свыше 80 *мв*. Влияние температуры незначительно, если при этом одинаково изменяются характеристики всех диодов. Исследовалась работа этой схемы в режиме перемножения напряжений от двух развязанных источников, в результате чего определено, что независимо от относительной амплитуды и полярности напряжений, подаваемых на входы, схема имеет такие же характери-

стики, как и в ранее разобранном режиме возведения в квадрат. Верхний предел рабочих частот определяется только свойствами примененных диодов. Сообщается, что одна из схем успешно работала на частотах до 12 *Мгц*. И. Д. Алимов

6 В292. Четырехквадрантное множительное устройство с использованием напряжения треугольной формы, диодов, сопротивлений и операционных усилителей. Pfeiffer Paul E. A four-quadrant multiplier using triangular waves, diodes, resistors, and operational amplifiers. «IRE Trans. Electron. Comput.», 1959, 8, № 2, 222—227 (англ.)

Работа описываемого устройства основана на использовании диодной схемы с квадратичной характеристикой и стандартного напряжения треугольной формы. Метод перемножения является модификацией известного приема получений произведения из квадрата суммы и квадрата разности сомножителей. В простой форме для перемножения достаточно иметь четыре диода, включенных в прямом и обратном направлении и имеющих один общий вывод. К другим выводам диодов подводятся перемножаемые напряжения и Δ-напряжение треугольной формы. Измерение общего тока схемы в точке соединения диодов дает величину, пропорциональную произведению входных напряжений. В схеме применены два операционных усилителя (см. рисунок), один из которых применяется как для измерения среднего то-



ка в общей точке, так и для развязки цепей и отфильтровывания Δ-напряжения. Точность метода определяется точностью Δ-напряжения, источник которого должен быть стабильным и иметь относительно низкое выходное сопротивление порядка 100 *ом* и менее. Экспериментальные работы были проведены на коммерческом генераторе с верхним частотным пределом 1200 *гц*. В дальнейшем будет проверена работа схемы на частотах несколько менее 25 *кгц* с применением кремниевых диодов привязки потенциала, подключаемых к основным диодам и к земле схемы, что устраняет взаимодействие цепей и снижает требования к источникам напряжений. Прототип множительного устройства имеет точность установки нуля в 0,1% и отклонения от линейности во всех четырех квадрантах 0,5%, причем последняя цифра может быть уменьшена вдвое более тщательным механическим расчетом устройства. В приложении дано описание процедуры настройки-балансировки сопротивлений схемы устройства. А. Ф. Смирнов

6 В293. Некоторые типы цифровых функциональных преобразователей. Ермилов Б. Л. В сб. «Теория и применение дискретн. автомат. систем». М., АН СССР, 1960, 339—351

Опыт показывает, что аналоговые и универсальные цифровые машины не всегда могут использоваться в системах автоматического управления. Аналоговые машины не удовлетворяют требованиям точности, а универсальные цифровые машины громоздки, сложны, скорость их часто недостаточна. На практике часто требуется выполнять небольшое число операций с очень большой скоростью. Этим требованиям удовлетворяют созданные за последние годы вычислительные устройства, являющиеся цифровыми аналогами вычислительных устройств непрерывного действия. В статье рассматривается цифровое устройство управления фрезой по заданной программе. Характерным является представление приращений координат в виде числа импульсов. Подробно описывается схема импульсного квадратора, осуществляющего математическую функцию $y = x^2$, где $x(t)$ — произвольная монотонная функция времени. Устройство работает так, что число импульсов на его выходе является квадратом числа импульсов на его входе. Приводится также схема импульсного устройства для извлечения квадратного корня. По такому же принципу можно создать импульсные устройства, осуществляющие и другие математические функции. Эти устройства могут работать последовательно и параллельно. Путем некоторого усложнения можно создать устройства для обработки немонотонных функций. Схемы, выполняющие отдельные математические операции, можно соединять для решения более сложных задач. Например, используя описанные устройства для возвышения в квадрат и извлечения квадратного корня, можно с большой скоростью и высокой точностью решать уравнение окружности $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. С. А. Раскутин

6 В294. Некоторые моменты развития программно-управляемых вычислительных машин за последние 20 лет. Zuse Konrad. Einige Gesichtspunkte der Entwicklung programmgesteuerter Rechenanlagen in den letzten 20 Jahren. «Allgem. statist. Arch.», 1959, **43**, № 4, 334—340 (нем.)

Дается исторический обзор развития вычислительной техники в Германии, США и Англии за последние 20 лет. Отмечаются два пути развития вычислительной техники: машины для переработки данных и машины для решения научных задач. Указывается, что для решения некоторых типов задач удобно применять две машины: большую машину для переработки данных и малую (или среднюю) машину для решения научных задач. Приводится пример использования «научной» машины Z-22 совместно с большой машиной для переработки данных для решения задач обеспечения полетов (Flugsicherung) в Европе. Указывается на имеющуюся в США тенденцию к развитию больших машин, в то время как в Европе, в основном, разрабатываются средние и малые машины. И. Б. Рохлина

6 В295. Осуществление квадратичной зависимости с помощью нелинейных сопротивлений. Grosswald E. The generation of squares with the use of nonlinear resistors. «IRE Trans. Circuit Theory», 1959, **6**, № 4, 334—339 (англ.)

Детально рассматривается вопрос о реализации (с заданной точностью) квадратичной зависимости между входным и выходным напряжениями резистивного четырехполюсника, содержащего нелинейное тиритовое сопротивление. Дается метод расчета элементов схемы при заданных параметрах тиритового сопротивления и заданной точности функционального преобразования. Анализ доведен до приближенных формул и графиков. Отмечаются вопросы, оставшиеся неисследованными. Ф. П. Тарасенко

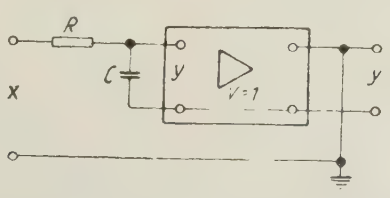
6 В296. Электронный «Ротор» — аналоговый вычислительный элемент. Johnston J. S. Electronic «Rotor»—analogue computing element. «Electron. Technol. [formerly Electron. and Radio Engr]», 1960, **37**, № 1, 2—6 (англ.)

Описывается электронное устройство «Ротор» (Rotor) для преобразования координат, суммирования углов, вычисления траекторий полета и решения других задач, которые обычно решались с помощью электромеханических элементов. Основной частью его является генератор гар-

монических колебаний, собранный на двух интегрирующих операционных усилителях и одном инверторе. Для преобразования прямоугольных координат в полярные две входные прямоугольные координаты вводятся как начальные условия на интегрирующие усилители генератора колебаний, фазы колебаний на выходе которых при работе генератора сдвинуты во времени на 90°. После включения схемы в режим интегрирования генератор вырабатывает синусоидальные колебания, амплитуда которых равна геометрической сумме входных координат, т. е. дальности, а фаза представляет угловую полярную координату (например, азимут точки). Если известны полярные координаты точки V и Θ и требуется повернуть радиус-вектор на дополнительный угол α, то поступают следующим образом: устанавливают на интегрирующих усилителях генератора начальные условия $V\sin\Theta$ и $V\cos\Theta$, а затем включают его в режим интегрирования на время t, выбранное из условия $\omega t=\alpha$. В результате получаются две новые прямоугольные координаты конца радиус-вектора, проведенного в заданную точку, $V\sin(\Theta+\alpha)$ и $V\cos(\Theta+\alpha)$. Для суммирования двух углов α и Θ применяются два идентичных «Ротора». На одном из них устанавливаются начальные условия, соответствующие углу α, а на другом — углу Θ, и затем «Роторы» включаются так, чтобы электрическое «вращение» происходило в противоположные стороны. В момент, когда на одном из интегрирующих усилителей второго «Ротора» напряжение проходит нулевую фазу, замеряются оба выхода первого «Ротора», которые представляют собой новые координаты точки, определяемой суммой заданных углов. Для имитации криволинейной траектории полета самолета на экране радиолокационной станции кругового обзора на «Ротор» вводятся начальные условия, соответствующие исходным координатам, после чего он включается в режим интегрирования с постоянной времени, пропорциональной заданной скорости разворота самолета (например, 100 мксек. могут представлять 1 мин. реального времени). Интегрирование прекращается автоматически после достижения нового заданного курса за счет применения спаренного компаратора, работающего методом «приближенного совпадения» и обеспечивающего устранение неопределенности в 180°, которая имеет место при применении одиночного компаратора. Приводятся схемы двух вариантов такого компаратора: импульсного и работающего на постоянном токе. Рассматриваются способы запоминания выходных напряжений и индикации их. Указывается, что электронный «Ротор» может применяться в системах вычислительных устройств, предназначенных для управления воздушным движением или для управления перехватом воздушных целей. И. Д. Алимов

6 В297. Интегратор Бутстрапа. Altenhein F. K. Ein Bootstrap-Integrator. «Regelungstechnik», 1959, **7**, № 7, 234—239 (нем.; рез. англ.)

В аналоговой вычислительной технике широко применяются интеграторы с усилителями постоянного тока с очень высоким коэффициентом усиления (интеграторы Миллера). Значительно менее распространен интегратор



Бутстрапа с усилителем, коэффициент усиления V которого равен 1 (см. блок-схему на рисунке). Чем более точно $V=1$, тем более точно происходит интегрирование (в пределах линейности усилителя). Описывается оригинальный двухламповый высококачественный усилитель балансного типа для применения в интеграторе Бутстрапа, не требующий стабилизированного источника питания. Дрейф нуля в интеграторе Бутстрапа значительно меньше, чем в интеграторе Миллера. Ф. П. Тарасенко

6 В298. Анализ ошибок фотоэлектрического генератора функций. Miura T., Abe R. Error analysis of a photoformer. «Electrotechn. J. Japan.», 1959, **5**, № 1, 3—7 (англ.)

Рассмотрены возможные источники ошибок фотоэлектрического генератора функций, используемого в моделирующих устройствах. Таковыми могут являться: 1) размер светящегося пятна на экране осциллографной трубки; 2) ошибки параллакса; 3) ошибки оптической системы; 4) ошибки из-за недостатков электронно-оптической системы осциллографной трубки; 5) переходные процессы в цепях генератора; 6) стабильность системы управления. Проведен анализ каждой из ошибок.

Н. Н. Михельсон

6 В299. Ошибки аппроксимации в диодных функциональных генераторах. Ream N. Approximation errors in diode function-generators. «J. Electron. and Control», 1959, **7**, № 1, 83—96 (англ.)

Рассматривается вопрос о вычислении ошибки, возникающей при замене нелинейной функции одной переменной аппроксимирующей ее кусочно-линейной функцией, получаемой на выходе функционального генератора, входящего в состав моделирующей установки. Рассматриваются два метода аппроксимации: метод уравновешенных отклонений, при котором ошибки разных знаков компенсируют друг друга, и метод наименьшего квадратичного отклонения. Решается задача о выборе необходимого отрезка аппроксимации на сегменты в зависимости от заданной точности. Рассматривается ряд примеров аппроксимации типичных функций. Для функций, приблизительно симметричных относительно точек деления отрезка аппроксимации, указывается улучшенный метод аппроксимации. Выводятся основные соотношения для подсчета ошибок для метода уравновешенных отклонений и метода наименьшего квадратичного уклонения. Библ. 6 назв. Д. А. Поспелов

6 В300. Электронные моделирующие устройства. Интегрирующее устройство. Ranga Rao J. V. Electronic analogue computers. The integrator. «J. Instn. Telecommun. Engrs», 1958, **5**, № 1, 33—37 (англ.)

Рассматривается действие простой интегрирующей цепочки RC и операционного усилителя, включенного по схеме интегрирования. В качестве примеров применения операционных усилителей приводятся и подробно поясняются схемы для моделирования гармонических колебаний и переходных процессов в электросхемах R—L—C. Указываются способы изменения масштабов времени и зависимых переменных. И. Д. Алимов

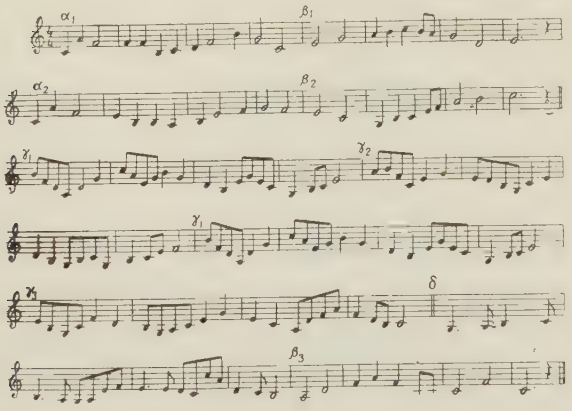
6 В301. Распознавание букв с помощью адаптирующих цепей. Roberts Lawrence G. Pattern recognition with an adaptive network. «IRE Internat. Convent. Rec. [formerly IRE Nat. Convent. Rec.]», 1960, **8**, № 2, 66—70 (англ.)

Представлены результаты нескольких экспериментов, проведенных с адаптирующими цепями, распознающими буквы алфавита. Адаптирующие системы — системы, которые улучшают свое действие при последовательном выполнении одного и того же опыта. Такое улучшение достигается за счет корректирующих поправок, изменяющих состояние системы в соответствии со значимостью выходных данных. Адаптирующие системы, рассматриваемые в статье, содержат логические цепи, которые преобразуют большой входной сигнал, несущий информацию о знаке, в несколько выходных сигналов, промодулированных внутренней системой весов. Соответствие между системой весов и входным сигналом достигается с помощью поправочных функций в процессе последовательной постановки одного и того же опыта. Эксперименты, произведенные с адаптирующими системами разных структур, показали, что при соответствующих по-

правочных функциях можно распознать букву при последовательной постановке опыта 40 раз с вероятностью 0,94. Г. С. Рычков

6 В302. Об алгоритмическом описании процесса сочинения музыки. Зарипов Р. Х. «Докл. АН СССР», 1960, 132, № 6, 1283—1286

Описывается алгоритм получения мелодии, подчиненной определенным музыкальным закономерностям. Приводятся схема программы, реализующей этот алгоритм на машине «Урал», и пример мелодии, полученной с помощью этой программы (см. рисунок). В процессе создания мелодии используется датчик случайных чисел. Основные закономерности, которым подчинена мелодия, заключаются в следующем: 1) мелодия представляет собой пьесу в 3 частях, из которых вторая в музыкальном отношении контрастна первой и третьей частям; 2) каждая фраза оканчивается на I, III или V ступенях звукоряда; 3) запрещаются следующие подряд два широких интервала одного знака; 4) число рядом стоящих



интервалов одного знака не должно превышать пяти; 5) диапазон высоты не превосходит 2,5 октав; 6) отсутствуют синкопы через тактовую черту (они могут быть введены только путем вмешательства человека с пульта управления); 7) число идущих подряд интервалов одного знака как правило тем меньше, чем шире интервалы. Работа алгоритма распадается на два этапа: сначала строится ритмический рисунок, т. е. длительности нот, составляющих мелодию, и затем уже их высота. Ритмический (аналогично и мелодический) рисунок строится из четырех основных структур, каждая из которых задается набором длительностей (соответственно, интервалов) и набором соотнесенных им вероятностей их появления. Для реализации каждой структуры используется датчик случайных чисел. Размер ($^3/_4$ или $^4/_4$) задается с пульта управления. Отмечены следующие факты: программа для машины «Урал» занимает около $^2/_3$ оперативной памяти; сочинение и выдача на печать пьесы производится за 2—2,5 минуты. Ю. И. Янов

6 В303. Некоторые данные о распределении форм многоосновных глаголов в связи с проблемой составления словаря основ для машинного перевода. Фрумкина Р. М. В сб. «Пробл. кибернетики». Вып. 4. М., Физматгиз, 1960, 197—205

Рассматривается вопрос о частоте появления в математических текстах регулярных и сингулярных глаголов, причем регулярными названы глаголы, все формы которых образуются от одной основы, а сингулярными — глаголы, имеющие несколько различных основ, которые могут быть получены одна из другой при помощи различного рода чередований. Для сингулярных глаголов рассматривается также вопрос о распределении типов чередований и о распределении различных форм. Приводятся данные, полученные при обследовании испанских текстов, взятых из различных областей математики, общим объемом 75 000 слов, среди которых встретилось 8200 глагольных форм от 402 глаголов. На основе полученных данных даются рекомендации о целесообразности включения той или иной основы в словарь для машинного перевода. С. В. Кулагина

6 В304. Обучающие машина и логика. Blyth John W. Teaching machines and logic. «Amer. Math. Monthly», 1960, **67**, № 3, 285—287 (англ.)

Краткое сообщение о проводимых опытах по составлению программ, предназначенных для обучения учащихся. Процесс обучения состоит из серии вопросов, задаваемых устройством, и ответов учащегося (которые устройство контролирует). Указывается, что обучающее устройство предназначено для индивидуального пользования и позволяет каждому учащемуся выбрать присущий ему темп. Первые опыты в этом направлении были сделаны в Hamilton College осенью 1958 г. при обучении логике. Сообщается, что предварительные результаты оказываются весьма обнадеживающими. С помощью программ, составленных профессором Якобсоном (Jacobson) и автором, удалось уменьшить число часов классных занятий (в колледже) на одну треть, повысить объем охватываемого материала и одновременно поднять уровень овладения предметом. В результате неуспеваемость была полностью исключена для данного класса. Дальнейшие опыты ставятся по обучению математике, психологии, французскому и немецкому языку. Н. Н. Поснов

6 В305. Новый тип обучающегося автомата. Свечинский В. Б. «Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика», 1960, № 2, 157—164

Сообщение об обучающемся автомате, который демонстрируется на Выставке достижений народного хозяйства СССР. В начальный момент времени реакции автомата случайны, далее автомат вступает во взаимодействие со средой — происходит его обучение, реакции автомата становятся детерминированными. Если в окружающей среде произошли изменения, автомат забывает старые цепи и вновь переходит в состояние обучения. При обучении автоматом преследуется определенная цель — появление подкрепления. Один из способов построения автоматов, взаимодействующих со средой,— это гомеостат Эшби. По мнению автора, гомеостат Эшби, в котором используется метод проб и ошибок, следует отнести не к обучающимся автоматам, а к самоорганизующимся системам. В описываемом автомате используется так называемый метод обучения с конца. Подчеркивается, что данный автомат имеет много общего с физиологическими системами. Рассмотрим множество раздражителей I_1, I_2,...,I_n и соответствующее множество рецепторных нейронов автомата. Рассмотрим множество действий (реакций) автомата a_1, a_2,...,a_m. Имеется подкрепляющий раздражитель N и соответствующий ему рецепторный нейрон автомата (в общем случае можно рассмотреть множество подкрепляющих раздражителей и множество соответствующих рецепторных нейронов). Тогда конкретная обстановка опишется цепочкой вида $I_k - a_e - I_m - a_d - \ldots - I_r - a_{\text{на}} - I_s - a_p - N$, где I_k — раздражитель рецептора автомата, a_k — действие автомата. Обучение происходит с конца, т. е. сначала производится выработка простейшей цепочки $I_s - a_p - N$. Если теперь после действия a_p, вызванного раздражителем I_s, не появляется покрепляющий раздражитель N, то автомат забывает эту цепочку, так как обстановка изменилась. Дальнейшее обучение (выработка следующей простейшей цепочки) происходит аналогично, за исключением того, что теперь подкреплением будут раздражители I_s, N и т. д. Построение обучающегося автомата сводится к двум проблемам: 1. Образование простейшей цепочки. Например, $I_s - a_p - N$. 2. Временное различение раздражителей. Автомат должен запоминать последовательность появления раздражителей; раздражители, появившиеся раньше, должны быть под-

крепляющими для образования последующих цепочек. Первая проблема решается построением матрицы $m \times n$ из так называемых центральных клеток. При нескольких совпадениях s-го раздражителя, p-го действия и подкрепления возбудится центральная клетка, лежащая на пересечении p-й строчки и s-го столбца. В дальнейшем всякое возбуждение рецепторного нейрона I_s будет вызывать возбуждение эффекторного нейрона a_p. Если несколько раз подряд не появляется подкрепление (обстановка изменилась), то цепочка $I_s - a_p$ забывается. Для производства действий в режиме обучения имеется специальный блок случайных действий, который отключается после обучения автомата. Приводится схема центральной клетки и ее описание. Рассматривается проблема временного различения раздражителей. Сеть временного различения раздражителей должна работать следующим образом: если в k-м столбце возбудилась какая-либо центральная клетка, то раздражитель должен стать подкрепляющим для всех остальных столбцов. Если далее какая-либо центральная клетка возбудилась в l-ом столбце, то раздражитель должен стать подкрепляющим для всех остальных столбцов, кроме k-го столбца, и т. д. Приводится схема сети временного различения раздражителей для одного столбца, удовлетворяющая приведенным выше требованиям. Общая блок-схема обучающегося автомата представляет собой сочетание матрицы $m \times n$ из центральных клеток, блока случайных действий и схемы временного различения раздражителей. Отмечается, что избыточность строения автомата ($m \times n$ центральных клеток против n клеток, необходимых для работы, когда автомат обучен) обуславливает возможность обучения. Поведение автомата полностью определяется взаимодействующей с ним средой, никакой программы заранее в него не закладывается. Поведение животного, по мнению автора, определяется как заранее заданной программой (наследственность), так и внешней средой (обучение, самоорганизация). Кратко говорится об электрической схеме действующего автомата. Автомат построен студенческим конструкторским бюро кибернетики МЭИ. Матрица действующего автомата 3×4. Отмечается, что обучающийся автомат, подобный данному, может быть применен в качестве автоматического обучающегося диспетчера, управляющего химическими процессами. Кроме того, он может войти в качестве составной части в автомат для распознавания формы, образа. И. Б. Рохлина

6 В306. Новая система для электрокардиографической записи, анализа и диагностики. Martinek J., Yeh G. C. K., Carnine R. A new system for electrocardiographic recording, analysis, and diagnosis. «IRE Trans. Med. Electron.», 1959, **6**, № 3, 112—116 (англ.)

До сего времени электрокардиография использует токи, генерируемые сердцем. Методика обследования и оборудование, однако, обеспечивают измерения лишь в небольшом количестве дисперсных точек (3—4). Новая система обеспечивает одновременное измерение в достаточно большом количестве точек для получения точной картины распределения потенциалов. Практически, количество точек может быть доведено до 100. Система использует большое количество датчиков с передатчиками. Датчики устанавливаются на теле больного, а выход каждого передатчика подается на отдельную модулирующую схему и затем суммируется на общем сигнальном усилителе. Выход усилителя состоит из N выходных каналов, соответствующих числу используемых датчиков. Эти выходы подаются на многоканальное записывающее устройство, где производится непрерывная запись работы сердца. Непосредственно возле записывающего пера размещается считывающее с диаграммы устройство, которое непрерывно развертывает получаемую запись и дает непрерывное напряжение в функции времени. Это напряжение содержит в каждый данный момент информацию о данных от всех N каналов записи. Информация в такой форме может быть подана на вход устройства преобразования данных для анализа и диагностики. Устройство преобразования данных может иметь несколько видов, в частности может быть применена программная вычислительная машина — непрерывного действия или цифровая. Кроме того, может быть проведена диагностика с помощью коррелятора, который имеет два идентичных входа. На один вход подается сигнал от считывающего устройства. Этот сигнал содержит все записанные данные от всех N датчиков. Все эти данные сравниваются по фазе и амплитуде с другим сигналом, подаваемым на второй вход коррелятора. Если в некоторый момент времени выход считывающего устройства сравним на фазе и амплитуде со вторым сигналом, на выходе коррелятора появляется сигнал. Если такого соответствия нет — на выходе коррелятора нет сигнала. Сигнал сравнения — сигнал второго входа — генерируется развертывающим устройством записи, используемым в качестве стандарта. Этот стандарт может быть записан раньше или он может состоять из последовательно разворачиваемых кадров движущейся пленки, на которой записаны диаграмма записи известных условий сердечной деятельности. Таких пленок может быть заготовлена библиотека и они могут следовать одна за другой с нормальной частотой по 24 кадра в 1 сек. Каждый кадр разворачивается электронным путем и результирующее непрерывное напряжение подается на второй вход коррелятора для сравнения с анализируемой диаграммой. Коррелятор был построен и испытания его дали удовлетворительные результаты.

Г. Х. Новик

6 В307. Решение на вычислительной машине буквенно-числовых задач типа «Numble»—. Solving of «numbles» by computer. «Computers and Automat.», 1960, **9**, № 3, 23 (англ.)

Редакция предлагает читателям составить программу решения на универсальной вычислительной машине задач, одна из которых предлагается ниже:

$$\begin{array}{r} \text{MERRY} \\ \times\ \text{MAS} \\ \hline \text{ATAWWY} \\ \text{EYBSST} \\ \text{SNESAS} \\ \hline =\text{NYBMMBWY} \\ \text{SASNARTEYSB} \\ \hline =\text{SANENEWYEAR.} \end{array}$$

В приведенной таблице, описывающей выполнение сперва умножения, а потом сложения, каждая буква означает одну из цифр от 0 до 9 (в принципе возможно представление каждой цифры несколькими буквами). Требуется определить соответствие между буквами и цифрами, т. е. найти ключ шифровки. Далее помещается сообщение читателя из Ливерпуля, который отмечает, что решение задач этого типа (с ограничением — только для операции сложения, но не для умножения) запрограммировано на машине «Нешнл Эллиотт-405» (National-Elliott 405). Автор указывает, что можно было бы перебрать один за другим все возможные способы шифровки и для каждого из них проверить, удовлетворяет ли он данному примеру. Однако такой метод требует большого числа «испытаний». Поэтому был использован другой метод, при котором последующие анализируемые варианты шифровки зависят от результатов предыдущих проверок. При этом число «испытаний» уменьшается с миллионов до нескольких тысяч. Решение задачи на вычислительной машине отнимает 1—2 мин. В. А. Брик

6 В308. Обзор прогресса и тенденций развития и использования систем для автоматической обработки данных в делопроизводстве правительственных учреждений США по состоянию на декабрь 1957 г.—. Survey of progress and trend of development and use of auto-

matic data processing in business and management control systems of the Federal Government, as of December 1957. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1959, **2**, № 9, 34—43 (англ.)

Доклад Комиссии контроля Госдепартамента США о результатах обследования использования систем для автоматической обработки данных в правительственных учреждениях, об эффективности автоматизации работы учреждений и влиянии новой учетно-счетной техники на финансово-бюджетные показатели их работы. Данные приведены по состоянию на 31 декабря 1957 г. К этому моменту в правительственных учреждениях США была установлена 121 электронная система для автоматической обработки данных. Были утверждены для установки еще 86 систем. Из общего количества установленных систем 85 находится в ведении Военного министерства США, гражданские учреждения располагают 36 установками. Три четверти установок военного министерства заняты решением задач техники перевозок и снабжения, вопросами штабной службы и расчетами тылов. Обследованию подверглись 40 систем, находящихся в ведении Военного министерства и 3 системы гражданской службы. Приводится содержание плана обследования, перечень конкретных задач, которые ставятся для выполнения машинами Военного министерства. Описаны тенденции в перестройке работы учреждений, связанные с включением в процесс систем автоматической обработки данных. Подробно перечислены изменения в организации работ казначейства США и федерального резервного банка. Изложен опыт Бюро переписи по использованию электронных вычислительных машин. См. также РЖМат, 1960, 11090.

Е. Ф. Бережной

6 В309. Возможности и границы автоматики в статистике. Szameitat Klaus. Möglichkeiten und Grenzen der Automatisierung in der Statistik. «Allgem. statist. Arch.», 1959, **43**, № 4, 316—333 (нем.)

Кроме производственных процессов автоматизации подвергаются и процессы переработки данных (коммерческие задачи и статистика). Под автоматизацией следует понимать «введение машин, которые без участия человека, самостоятельно, по программам выполняют определенные действия». Автоматизация в статистике начинается с введения программно-управляемых вычислительных машин. Подчеркивается значение довоенных работ Цузе по вычислительным машинам. Приводится краткое описание блок-схемы цифровой вычислительной машины. На вопрос «может ли машина мыслить?» автор отвечает отрицательно. Высказывается ряд замечаний относительно предмета и области применения кибернетики. Более подробно разбираются конкретные вопросы, связанные с применением автоматизации в статистике. Библ. 43 назв.

И. Б. Рохлина

6 В310. Автоматическое считывание и запись дискретных данных при анализе поведения обезьяны. McConnell D., Polidora V. J., Friedman M. P., Meyer D. R. Automatic reading and recording of digital data in the analysis of primate behavior. «IRE Trans. Med. Electron.», 1959, 6, № 3, 121—125 (англ.)

С помощью системы программного управления и собирания данных изучалось обучение обезьян-приматов и их восприятие. Система предназначена для автоматизации процесса исследования, при котором экспериментатор представляет стимуляторы, вручает вознаграждения и вручную записывает данные. Представление стимуляторов выполняется с помощью специально приспособленного проектора. Стимуляторы проектируются на один или два экрана в комнате животных, где находятся также контактные датчики реакций животных. Эти реакции записываются на перфокарты с помощью перфорирующей установки ИБМ-526. Должно или не должно следовать вознаграждение за реакцией, определяется перфорацией, которую экспериментатор пробивает заранее на перфокарте. Если эта карта содержит точно такую же пробивку, которую производит животное на другой карте, следует вознаграждение. В дополнение к информации о реакции перфокарты воспринимают четыре разряда информации о времени между реакциями.

Г. Х. Новик

6 В311. Заметки к недавней статье. Anderson William H. Remarks on a recent paper. «Communs. Assoc. Comput. Mach.», 1959, **2**, № 6, 25—26 (англ.)

Сообщается, что автором проведено вычисление интегралов излучения (РЖМат, 1960, 8297) на вычислительной машине ИБМ-650. Используя программу интегрирования Рунге-Кутта, автор запрограммировал функцию

$$\ddot{Y} = \frac{[x^2 - n(n+1)]Y}{x^2}.$$

Приготовление 31 инструкции для программы заняло 25 мин.

О. В. Бачин

6 В312. Применение соединения моделирующего устройства и электронных вычислительных машин для определения траектории электрона. Vine J. Application of a combination of analogue and digital computers to electron trajectory tracing. «Comput. J.», 1959, **2**, № 3, 134—144 (англ.)

Описаны два метода определения траектории электронов или других заряженных частиц в электростатических полях. Оба метода используют электронную вычислительную машину «Пегас» фирмы «Ферранти» совместно с моделирующим устройством, построенным на системе сопротивлений. Первый метод употребляется для расчета свойств электронных линз, второй является специально изобретенным методом с более общими приложениями. Приведены таблицы сравнения результатов аналитического и численного решения дифференциального уравнения, описывающего движение электрона в аксиально-симметричном электростатическом поле. Результаты вычислений показывают, что оба метода дают высокую точность.

В. Л. Евтеев

6 В313. Интерпретирующие подпрограммы для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на машине ИБМ-650. Edelman Franz. An interpretive subroutine for the solution of systems of first order ordinary differential equations on the 650. «IBM Appl. Sci. Techn. Newsletter», 1957, № 13, 52—72 (англ.)

6 В314. Задачи, которые будут решать в будущем электронные вычислительные машины. Hofmann Rolf. Zukunftsanfgaben der elektronischen Computation. «Automatik», 1959, **4**, № 7, 217—218 (нем.)

Статья общего характера.

6 В315. Сообщения будут измеряться. Системы, масштабы и количество информации. Hofmann Alfred. Nachrichten werden gemessen. Systeme, Maßstab und Informationsgehalt. «Kosmos», 1960, **56**, № 8, 336—339 (нем.)

Популярная статья.

6 В316. Проект словаря терминов на нескольких языках. Holmstrom J. E. The multilingual terminology project. «Bull. Centre internat. provis. calcul.», 1960, № 8, 11—16 (англ.)

Краткое описание организации работы по составлению словаря терминов по вычислительной технике на нескольких языках.

6 В317. Общий обзор работы вычислительных машин. Haft Guntram. Allgemeine Betrachtungen zur Arbeitsweise der elektronischen Rechenmaschinen. «Elektronik», 1960, **9**, № 8, 225—227 (нем.)

Популярная статья.

6 В318 К. Системы регулирования с автоматической оптимизацией параметров и некоторые принципы более совершенных обучающихся машин. Эндрью А. М.

(Междунар. федерация по автомат. упр. 1-й Междунар. конгресс по автомат. упр.). М., АН СССР, 1960, 16 стр., илл.

Самооптимизация является ценным свойством вычислительной системы в случае, если ситуация, в которой работает машина, слишком сложна для анализа или если изменения ситуации таковы, что нужно менять способ действия системы, чтобы получить эффективное управление. Но удовлетворительного управления нельзя получить, используя систему, в которой все измеряемые величины оцениваются с помощью только двух значений. Поэтому машина должна принимать во внимание количественную информацию, закодированную, например, в бинарной форме. В докладе рассматриваются различные принципы построения саморегулирующихся систем. Поступающая информация вводится в регулятор, в котором определяется управляющее воздействие на систему, согласно определенным уравнениям, например,

$$d = K + La + Mb + Nc, \qquad (1)$$

где a, b, c — текущие или сдвинутые по времени величины любой переменной процесса (температура, давление и т. д.), d — управляющее воздействие, K, L, M, N — параметры. В относительно простых системах оптимизация их управляющих воздействий достигается автоматической регулировкой параметров в соответствии с изменениями обстановки. Могут быть получены некоторые новые свойства машин: самоорганизация, позволяющая машине изменять вид уравнений управления и соответственно менять внутреннюю структуру машины, можно подобрать критерии, с помощью которых система будет решать, какие дополнительные члены полинома полезно добавить в уравнение; образование понятия, с помощью которого машина решает, какие функции от ее входных параметров могут быть использованы для улучшения управления; способность обучения, при котором методы оптимизации сами могут изменяться с целью лучшего приспособления к обстановке. Для выполнения саморегулирования может требоваться большое время, так как нужно рассмотреть весьма большое число различных ситуаций. Выход из этого положения — введение интерполяции. Из всех возможных ситуаций выбирается небольшое число основных ситуаций, по которым с помощью интерполяции можно определить управляющее воздействие в каждом конкретном случае. Для изучения процесса оптимизации управления была исследована система, состоящая из регулятора и связанного с ним регулируемого процесса, в которой управляющее воздействие осуществлялось по уравнению (1). Процесс был моделирован на цифровой вычислительной машине ДЭЮКЕ. В докладе приводятся предварительные результаты этого исследования. Предполагается, что к июню 1960 г. будет получена значительно большая информация. Библ. 18 назв. С. А. Раскутин

См. также: 6 В171, 6 В173, 6 В188

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Перед номерами рефератов опущены номер и индекс 6 В выпуска)

А

Алпатова Р. Л. 193
Анисимов А. Г. 180

Б

Беленький М. Я. 172
Беллман Р. 133 К
Бендерский Я. М. 149
Бессмертный Б. С. 163
Блох Э. Л. 1
Брудно А. Л. 144

В

Вентцель Е. С. 132 К
Вентцель М. К. 233
Вилкас Э. И. 21
Вол В. А. 285
Воробьев Л. М. 174

Г

Гитис Э. И. 284
Гнеденко Б. В. 156
Гребенюк Д. Г. 242
Григорьева Е. А. 200

Д

Давиденко Д. Ф. 217
Данко П. Е. 231
Доступов Б. Г. 171

Е

Ермилов Б. Л. 293

З

Заволокин А. К. 283
Заездный А. М. 254
Зарипов Р. Х. 302

И

Ибрагимов И. А. 13
Индо 107

Й

Йокояма 115, 119

К

Каинума 119
Кано 122
Каминский Л. С. 165
Карацу 124
Карпелевич Ф. И. 16
Кириллов Н. Е. 140
Клабукова Л. 184
Клосс Б. М. 7, 9
Кордонский Х. Б. 150
Кочанов Н. С. 236, 237
Кривошеин Л. Е. 210
Кубилюс И. П. 15
Кутай А. К. 154

Л

Лебедев В. И. 182
Линник Ю. В. 5, 15
Лунц А. Л. 144

М

Мартынюк А. Е. 190
Мацуда 87
Маэда 117
Мелешко В. П. 205
Миллер Е. В. 275
Минасян Р. С. 185
Мохов Ю. В. 213
Муракава 109

Н

Нагао 122
Назаров И. А. 268
Накахара 118

О

Оку Т. 115
Окумура С. 113
Осава Ю. 123

П

Положий Г. Н. 186
Попов А. Г. 176
Пушной Б. М. 286

Р

Рао С. Р. 31
Ремез Е. Я. 72
Риекстыньш Э. 232
Рихтер В. 10

С

Самко Г. П. 222
Сарманов О. В. 6
Сато 110
Саульев В. К. 259 К
Свечинский В. Б. 305
Свирский И. В. 211
Сигэока Э. 111
Скороход А. В. 17
Смирнов В. Н. 239
Смирнов Л. В. 155
Смирнов Н. А. 268
Смирнов С. А. 212, 214
Смоляк С. А. 243
Статулявичус В. А. 12
Студнев Ю. П. 8
Судзуки Е. 121

Т

Тлегенов К. Б. 175
Тутубалин В. Н. 16

У

Уждавинис Р. В. 15
Усынин В. И. 173

Ф

Фрумкина Р. М. 303
Фукао Т. 82

Х

Халилов З. И. 183
Харано 114
Хетагуров Я. А. 266
Хисинума 108

Хорафас Д. 125
Хуан Юй-жэнь 209
Ху Чун-фэй 23

Ц

Цареградский И. П. 11
Цыбаков Б. С. 169 Д

Ч

Ченцов Н. Н. 14

Ш

Швец М. Е. 205
Шур М. Г. 16

Э

Эндрью А. М. 318 К

Я

Ямадзаки 116
Ямаки 120
Ясуи 112

A

Abe R. 298
Abruzzi A. 128 K
Akaike H. 216
Akama H. 81
Akers S. B., Jr. 66
Alexander W. 261
Allen S. G. 102
Altenhein F. K. 297
Anderson W. H. 311
Aparo E. L. 228, 235
Armitage P. 159
Ascher M. 203
Ashford J. R. 161

B

Bahadur R. R. 33
Beckel A. 55 K
Bellman R. 78, 79
Berge C. 74
Bhattacharayya A. K. 151
Blyth J. W. 304
Bohn E. V. 287
Bowman E. H. 99
Braun L., Jr. 80
Brauer A. 219
Brown S. 161
Bush K. A. 44

C

Cain A. L. 277
Cansado E. 73
Carnine R. 306
Charnes A. 106
Clark C. E. 91
Connett J. 276
Cooke P. 276
Cooper W. W. 106
Coppel W. A. 226
Corbató Fernando J. 252
Cucconi O. 93, 94
Cundall C. M. 290

D

Daeves K. 55 K
Dantzig G. B. 100
Das M. N. 164
Davis P. 240
Dean D. L. 255
De Baun R. M. 145
Diamond S. 56 K
Dieulefait C. 246
Durand E. 257 K
Durand D. 37
Dynkin E. B. 26 K

E

Edelman F. 313
Egerváry E. 187
Ekman G. 28
Elfving G. 63
Elliott D. 208
Epstein B. 38

F

Fazar W. 91
Fehlberg E. 177
Fiedler M. 218
Flinn E. A. 245
Ford L. R., Jr 65
Friedman L. 130 K
Friedman M. P. 310
Fulkerson D. R. 64, 65

G

Gale D. 67, 127 K
Galejs J. 138
Galliher H. P. 105
Gianola U. F. 279
Giardina B. 95
Gill A. 70
Girault M. 18
Gnanadoss A. A. 223
Gnedenko B. W. 24 K
Goldstine H. H. 220
Gould H. W. 227
Greenwood J. A. 37
Grosswald E. 295
Guilbaud G. 83
Guttman I. 46

H

Haft G. 317
Hannan E. J. 58 K
Hansen C. 168
Hanssmann F. 104
Haward L. R. C. 260
Hawkins G. A. 202
Haycocks H. W. 85
Hersch J. 196
Hillier J. A. 68
Hofmann A. 315
Hofmann R. 314
Holmstrom J. E. 316
Howland W. E. 202
Hsu L. C. 244
Hudimoto H. 51
Huffman D. A. 262
Hull T. E. 178

I

Ikeda H. 280
Isaacson E. 204
Isbell J. R. 60-62
Isida M. 280
Isii K. 2

J

Jacobson J. D. 134
Jantscher L. 189
Johnson S. M. 97
Johnston J. S. 296
Jucys A. 249
Jurek B. 170

K

Kalaba R. 78
Karr P. R. 139
Katz S. 145
Keane A. 247
Keller H. B. 199
Kett G. W. 36
Kiefer J. 50
Kitagawa M. 270
Kitagawa T. 147, 148
Klega V. 47
Klett G. W. 36
Korganoff A. 258 K
Koshal R. S. 29
Kreiss H. O. 207
Kreweras G. 153
Krzywoblocki M. 206
Kuhn H. W. 59

L

Laha R. G. 3
Landau H. G. 188
Lee A. M. 146
Leiner A. L. 265
Leipnik R. 142
Leslie P. H. 162
Lill D. 253
Lipton S. 39
Longton P. A. 146
Longuet-Higgins M. S. 135
Lovell C. A. 281
Lowan A. N. 201
Lukacs E. 3

M

McConnell D. 310
Malcolm D. G. 91
Malecot G. 157
Manne A. S. 101
Martinek J. 306
Masaitis Č. 230
Masani P. 22
Massé P. 84
Mastandrea P. 224
Maurice R. J. 45
McKay M. H. 247
Metzger R. W. 126 K
Mewborn A. C. 219
Meyer D. R. 310
Mihăilescu M. 198
Mihăilescu Y. 198
Miller J. C. P. 179
Miller R. R. 238
Mine H. 103
Mitten L. G. 96
Miura T. 298
Morlat G. 84
Morris D. J. 261
Morse P. M. 105

N

Newbery A. C. R. 178
Nordõ J. 136
Notz W. A. 265

O

Oderfeld J. 35
Olkin I. 44
Orey S. 20
Ostrowski A. M. 256 K

P

Parisot G. R. 77
Patterson H. D. 39
Peligry C. 195
Perkalskis B. 249
Pfeiffer P. E. 292
Piesch W. 89
Plackett R. L. 57 K
Plymen J. 85
Polidora V. J. 310
Pollack M. 69
Pope D. A. 181
Práger M. 197
Prékopa A. 19
Pták V. 218
Putz R. R. 167

Q

Quandt R. E. 88

R

Rabinowitz P. 240
Rajski C. 143
Ranga Rao J. V. 300
Rao B. R. 43
Ream N. 299
Rényi A. 141
Ríos S. 32, 90
Roberts L. G. 301
Robertson A. 160
Rogers G. S. 30
Roseboom J. H. 91
Rowe W. D. 264

S

Saaty T. L. 129 K
Saggerson J. K. 290
Saigusa Y. 216
Salzer H. E. 229, 234, 250
Sandler G. H. 76
Sasieni M. 130 K
Schechter S. 192
Scheidegger A. E. 221
Schjødt R. 191
Schmidtmayer J. 225
Schmitt W. F. 263
Schubert E. J. 274
Schuette E. H. 42
Schulze J. 49
Selmer E. S. 241
Shaw G. 290
Shetty C. M. 75
Siegel S. 52
Simond M. 105
Simonsen W. 251
Sisson R. L. 98
Sklansky J. 273
Smith C. S. 161
Smith J. L. 265
Solow R. M. 54
Springer G. 194
Stancu D. D. 248
Stevens C. D. 48
Stojakovic M. 215
Struble R. A. 238
Sugurovas V. 249
Sukhatme B. V. 29
Swift P. 277
Symonds G. H. 106
Szameitat K. 309
Szulkin P. 137

T

Takács L. 25 K
Tate R. F. 36
Tauber S. 255
Ter-Manuelianc A. 86
Theodorescu R. 166
Tintner G. 71
Tonik A. B. 263
Trabant E. A. 202
Trefall H. 136
Tsuzuki T. 270
Tucker A. W. 59
Tukey J. W. A. 52
Turin G. L. 4
Turner M. E. 48

U

Uretsky J. L. 252
Ušpalis K. 249

V

Vine J. 312

W

Walter A. 288
Watts A. T. 277
Weichselberger K. 40, 41
Weinberger A. 265
White J. S. 53
Whiting P. D. 68
Wiebenson W. 69
Wijsman R. A. 34
Wilcox R. H. 291
Willmore P. L. 221
Windley P. F. 267
Wood W. W. 134
Wright S. 158

Y

Yaspan A. 130 K
Yeh G. C. K. 306
Yokoyama M. 115

Z

Žaludová A. H. 152
Zuse K. 294

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ДИРЕКТОР ИНСТИТУТА профессор *А. И. Михайлов*

Реферативный журнал издается в следующих сериях:

АВТОМАТИКА И РАДИОЭЛЕКТРОНИКА — Главный редактор канд. техн. наук *А. С. Бучинский*, АСТРОНОМИЯ И ГЕОДЕЗИЯ — Главный редактор профессор *К. Ф. Огородников*, БИОЛОГИЯ — Главный редактор канд. биол наук *В. П. Доброхвалов*, ГЕОГРАФИЯ — Главный редактор доктор геогр. наук *А. А. Насимович*, ГЕОЛОГИЯ — Главный редактор профессор *Е. Е. Захаров*, ГЕОФИЗИКА — Главный редактор профессор *И. А. Хвостиков*, ГОРНОЕ ДЕЛО — Главный редактор докт. техн. наук *Е. М. Фаерман*, МАТЕМАТИКА — Главный редактор доктор физ.-мат. наук *Р. В. Гамкрелидзе*, МАШИНОСТРОЕНИЕ — Главный редактор канд. техн. наук *В. З. Фрейдберг*, МЕТАЛЛУРГИЯ — Главный редактор член-корреспондент АН СССР *Н. В. Агеев*, МЕХАНИКА — Главный редактор академик *Л. И. Седов*, ТРАНСПОРТ — Главный редактор канд. техн. наук *В. Т. Осипов*, ФИЗИКА — Главный редактор профессор *Э. В. Шпольский*, ХИМИЯ — Заведующий отделом профессор *В. В. Кафаров*, Главный редактор *В. В. Серпинский*, ЭКОНОМИКА ПРОМЫШЛЕННОСТИ — Главный редактор профессор *С. М. Лисичкин*, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА — Главный редактор профессор *Б. М. Тареев*

СОДЕРЖАНИЕ

СВОДНОГО ТОМА РЖ МАТЕМАТИКА № 6 за 1961 г.

6 А. Общие вопросы 6А1
История математики. Персоналия . . . 6А24
Преподавание математики 6А59
Основания математики и математическая логика 6А92
Теория чисел 6А107
Алгебра 6А154
Многочлены и линейная алгебра . . . 6А157
Группы 6А189
Поля, кольца, алгебры и структуры . . 6А264
Алгебраическая теория схем связи и управления 6А335
Топология 6А353
Геометрия 6А398
Приложения геометрии 6А401
Элементарная геометрия 6А412
Аналитическая геометрия 6А421
Проективная и неевклидовы геометрии 6А429
Начертательная геометрия 6А437
Алгебраическая геометрия 6А440
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 6А449
Геометрия n-мерного пространства . . 6А476
Теория относительности 6А508
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 6А513
Метрические методы в геометрии . . . 6А527
Выпуклые многообразия 6А530
Авторский указатель
6 Б. Теория функций действительного переменного 6Б1
Теория множеств 6Б32
Приближение функций полиномами и их обобщениями 6Б45
Теория функций комплексного переменного 6Б63
Дифференциальные уравнения
Обыкновенные дифференциальные уравнения 6Б114
Уравнения в частных производных . . . 6Б180
Приложения к физике, технике и естественным наукам 6Б199
Интегральные уравнения 6Б296
Вариационное исчисление 6Б307
Анализ (другие вопросы) 6Б333
Числовые ряды 6Б349
Специальные функции 6Б371
Интегральные преобразования и операционное исчисление 6Б377
Приложения общих методов математического анализа 6Б385
Функциональный анализ 6Б396
Авторский указатель
6 В. Теория вероятностей и математическая статистика
Теория вероятностей 6В1
Математическая статистика 6В28
Теория игр, исследование операций и математическая экономика 6В59
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 6В134
Численные и графические методы 6В170
Таблицы . . . . . —
Вычислительные машины и математические приборы 6В260
Применение вычислительных машин . . —
Авторский указатель

01477/7
П.Я.Щ. 1598
ТЕХ. БИБЛИОТЕКА
1967

Цена 38 к.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА на II-ое ПОЛУГОДИЕ 1961 года

НА РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ АКАДЕМИИ НАУК СССР

МАТЕМАТИКА

ПОДПИСНАЯ ЦЕНА ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ПОДПИСЧИКОВ

на сводный том и отдельные выпуски с 1 июля 1961 года

СНИЖЕНА до 50%

Журнал рассчитан на широкий круг математиков и лиц, работающих в смежных с математикой областях науки и техники, и дает по возможности всеобъемлющую информацию об опубликованных в мировой литературе научных работах по всем разделам математики и многим ее приложениям.

Журнал выходит один раз в месяц.

К комплекту сводного тома в виде приложений будут даны годовые указатели: авторский, систематический и предметный.

Журнал издается как в виде сводного тома, так и в виде трех отдельных выпусков.

Подписка не ограничена, принимается с любого очередного номера.

Условия подписки:

СВОДНЫЙ ТОМ с указателями только на 6 м-цев	
для организаций	12-72
для индивидуальных подписчиков	8-48
СВОДНЫЙ ТОМ без указателей на 6 м-цев	
для организаций	9-24
для индивидуальных подписчиков	6-30

ОТДЕЛЬНЫЕ ВЫПУСКИ на 6 м-цев	Для организаций	Для индивид. подписчиков
I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ. ЛОГИКА. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ. АЛГЕБРА. ТОПОЛОГИЯ. ГЕОМЕТРИЯ	3—60	2—28
II. АНАЛИЗ	4—20	2—64
III. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ	2—28	1—44

Подписка принимается в пунктах подписки «Союзпечать», почтамтах, конторах и отделениях связи, общественными уполномоченными на заводах и фабриках, шахтах, промыслах и стройках, в учебных заведениях и учреждениях.

Заказы можно направлять также в Отдел подписки и реализации Производственно-издательского комбината ВИНИТИ по адресу:

г. Москва, Люберцы-6, Октябрьский проспект д. 403

Р/сч. 58526 в Люберецком отделении Госбанка г. Москвы